Prevedere il futuro: simulazione matematica e realtà fisica

Alberto Valli

Dipartimento di Matematica, Università di Trento

Volendo dare un inizio alla nostra storia, si può fissarlo al 1600 circa.

Secolo che è un “enorme paradosso”[1]:

- il periodo più tragico mai verificatosi [conflitti, carestie, epidemie]
- ma anche età dell'oro, spartiacque fra il mondo antico e quello moderno.

[1] I. Mortimer, Il libro dei secoli, Bollati Boringhieri, 2015

Affermazioni che ricordano la sintesi di Orson Welles, nel film “Il terzo uomo” (parlando però di un altro periodo storico):

In Italia, nei trent’anni sotto i Borgia, hanno avuto assassinii, guerre, terrore e massacri, ma hanno prodotto Michelangelo, Leonardo da Vinci e il Rinascimento. In Svizzera, hanno avuto cinquecento anni di amore fraterno, pace e democrazia, e che cos’hanno prodotto? L’orologio a cucù.

Affermazioni che ricordano la sintesi di Orson Welles, nel film "Il terzo uomo" (parlando però di un altro periodo storico):

> In Italia, nei trent'anni sotto i Borgia, hanno avuto assassinii, guerre, terrore e massacri, ma hanno prodotto Michelangelo, Leonardo da Vinci e il Rinascimento. In Svizzera, hanno avuto cinquecento anni di amore fraterno, pace e democrazia, e che cos'hanno prodotto? L'orologio a cucù.

Affermazioni che ricordano la sintesi di Orson Welles, nel film “Il terzo uomo” (parlando però di un altro periodo storico):

In Italia, nei trent’anni sotto i Borgia, hanno avuto assassinii, guerre, terrore e massacri, ma hanno prodotto Michelangelo, Leonardo da Vinci e il Rinascimento. In Svizzera, hanno avuto cinquecento anni di amore fraterno, pace e democrazia, e che cos’hanno prodotto? L’orologio a cucù.

Qual è stato l'elemento dirompente?

La rivoluzione scientifica!

È stato detto:[2]

- "la tecnologia guidò l'ascesa dell'Occidente"
- "la scienza, l'ingrediente miracoloso della moderna cultura tecnologica occidentale".

[2] F. Bray, Technological transitions, in "The Cambridge World History, vol. VI, part 1", Cambridge University Press, 2015

Londra, 1600

La matematica, dopo il periodo greco e alessandrino, terminato verso il 400, non aveva avuto sviluppi veramente significativi fino al 1100 (anche se era rimasta vitale grazie alle civiltà indiana e araba).

Atene, 350 a.c.

La ripresa degli studi in Europa a partire dal 1100 aveva portato nuove conoscenze, soprattutto in campo algebrico (soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado).

Niccolò Tartaglia (≈1499–1557) e Girolamo Cardano (1501–≈1576)
[due attori di un grande litigio scientifico].

Ma il grande salto di qualità si ebbe nel 1600...

Due padri:

Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) [anche loro, due attori di un altro grande litigio scientifico].

Precursori (lista incompleta!):

- René Descartes (1596–1650)
- Bonaventura Cavalieri (1598–1647)
- Pierre de Fermat (1601–1665)
- Evangelista Torricelli (1608–1647)
- John Wallis (1616–1703)
- Isaac Barrow (1630–1677)
- James Gregory (1638–1675)

Sul monumento sepolcrale di Newton nell'Abbazia di Westminster si trova un'iscrizione in latino che dice fra l'altro:

"Con una forza della mente quasi divina, e con la matematica da lui creata, per primo comprese il moto e la forma dei pianeti, l'orbita delle comete, le maree, le proprietà dei raggi di luce".

Più sintetico ma molto efficace è l'epitaffio di Newton del poeta Alexander Pope:

Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, "Let Newton be" and all was light.

La Natura e le leggi di Natura se ne stavano nascoste nel buio:
Dio disse, "Sia fatto Newton" e tutto fu chiaro.

Sul monumento sepolcrale di Newton nell'Abbazia di Westminster si trova un'iscrizione in latino che dice fra l'altro:

"Con una forza della mente quasi divina, e con la matematica da lui creata, per primo comprese il moto e la forma dei pianeti, l'orbita delle comete, le maree, le proprietà dei raggi di luce".

Più sintetico ma molto efficace è l'epitaffio di Newton del poeta Alexander Pope:

Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, "Let Newton be" and all was light.

La Natura e le leggi di Natura se ne stavano nascoste nel buio:
Dio disse, "Sia fatto Newton" e tutto fu chiaro.

Sul monumento sepolcrale di Newton nell'Abbazia di Westminster si trova un'iscrizione in latino che dice fra l'altro:

"Con una forza della mente quasi divina, e con la matematica da lui creata, per primo comprese il moto e la forma dei pianeti, l'orbita delle comete, le maree, le proprietà dei raggi di luce".

Più sintetico ma molto efficace è l'epitaffio di Newton del poeta Alexander Pope:

Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, "Let Newton be" and all was light.

La Natura e le leggi di Natura se ne stavano nascoste nel buio:
Dio disse, "Sia fatto Newton" e tutto fu chiaro.

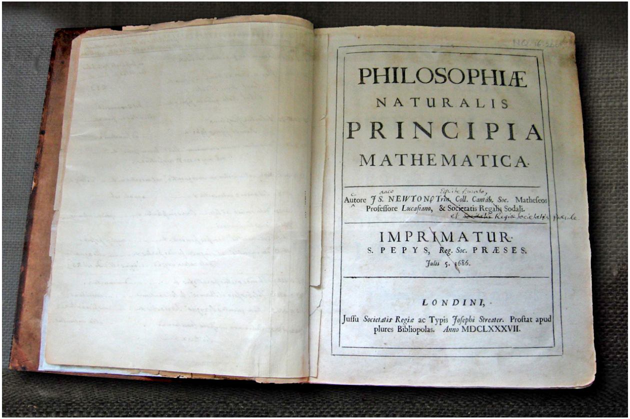
Che cosa mancava?

Il calcolo infinitesimale!

Scrive Morris Kline, matematico e storico della matematica:

"assieme alla geometria euclidea, la più grande creazione della matematica".

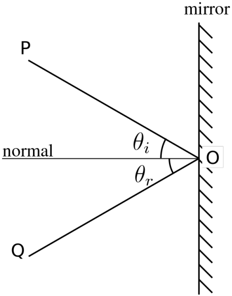
Il libro:

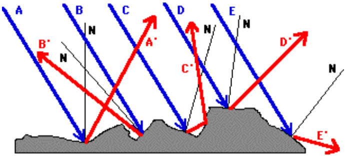


Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687).

Quali erano i problemi aperti?

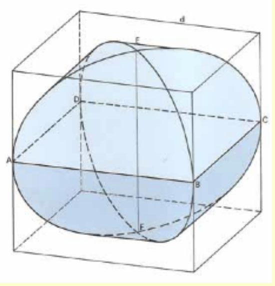
Vado più veloce di una Ferrari?

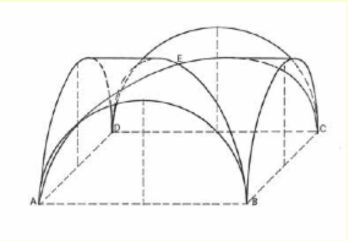




Angoli di riflessione, rette normali, rette tangenti.

Avranno calcolato bene il punto di caduta?

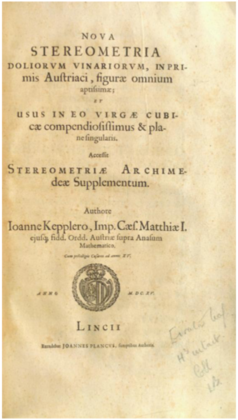




Piero della Francesca (≈1416–1492), la volta a padiglione e la volta a crociera.

Piero della Francesca in un ritratto di Santi di Tito.

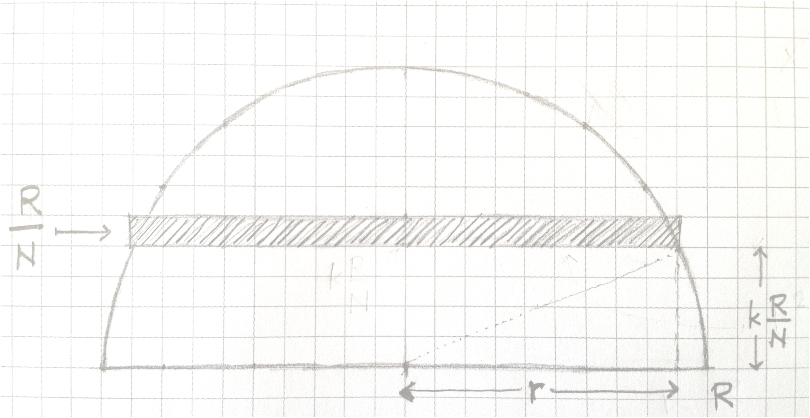
Le letture di Piero della Francesca.



NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRI-
mis Auſtriaci, figuræ omnium
aptiſsimæ;
ET
USUS IN EO VIRGÆ CUBI-
cæ compendioſiſſimus & pla-
ne ſingularis.
Acceſſit
STEREOMETRIÆ ARCHIME-
deæ Supplementum.
Authore
Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I.
ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum
Mathematico.
ANNO M. DC. XV.
LINCII

Johannes Kepler (1571–1630)
e il libro "Nova stereometria doliorum vinariorum" (1615).

Tre esempi di calcolo, alla maniera di Piero della Francesca e di Kepler: il primo è il volume della sfera.



$$\boxed{r^2 + \frac{k^2 R^2}{N^2} = R^2}$$

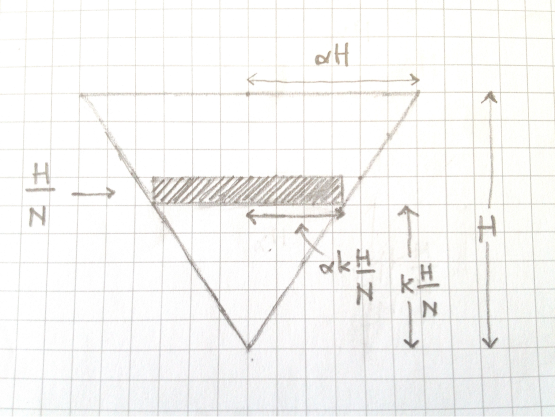
$$\text{Volume} \simeq 2\sum_{k=1}^{N} \pi\left(R^2 - k^2\frac{R^2}{N^2}\right)\cdot\frac{R}{N} =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{N}\left(N - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^2\right)$$

$$= 2\pi R^3\left(1 - \frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N} k^2\right) \simeq 2\pi R^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Il secondo è il volume del cono.



$$\text{Volume} \simeq \sum_{k=1}^{N} \pi \alpha^2 k^2 \frac{H^2}{N^2} \cdot \frac{H}{N} =$$

$$= \pi \alpha^2 H^2 \cdot \frac{H}{N^3} \sum_{k=1}^{N} k^2 \simeq$$

$$\simeq \text{area(base)} \cdot \frac{H}{3}$$

Il terzo è: l'area della superficie della sfera.

Se si spezza la sfera in tanti coni C_k con vertice al centro e base che si appoggia sulla superficie, ne viene che l'area della superficie A è legata al volume dalla relazione:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi R^3 = V \ &\simeq \sum_{k=1}^{N} \mathrm{volume}(C_k) \simeq \sum_{k=1}^{N} [\mathrm{area\ di\ base}(C_k)]\ \frac{R}{3} \\ &\simeq A\ \frac{R}{3}\,,\end{aligned}$$

dunque $A = 4\pi R^2$.

Un altro paio di osservazioni nascono a questo punto:

- posso calcolare il volume della sfera come somma di aree di superfici sferiche
- posso calcolare l'area della superficie della sfera come variazione "istantanea" del volume sferico.

Infatti si ha

$$\sum_{k=1}^{N} A_{k\frac{R}{N}} \frac{R}{N} = \sum_{k=1}^{N} 4\pi k^2 \frac{R^2}{N^2}\frac{R}{N} = 4\pi \frac{R^3}{N^3}\sum_{k=1}^{N} k^2 \simeq 4\pi R^3 \frac{1}{3} = V_R\,.$$

$$\begin{aligned}\frac{V_{R+\frac{R}{N}} - V_R}{\frac{R}{N}} &= \frac{N}{R}\frac{4}{3}\pi\left[\left(R+\frac{R}{N}\right)^3 - R^3\right]\\ &= \frac{N}{R}\frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{3}{N}+\frac{3}{N^2}+\frac{1}{N^3}\right) \simeq 4\pi R^2 = A_R\,.\end{aligned}$$

Qui c'è sotto qualcosa...

[Se siete Newton, o uno studente di liceo scientifico, avete già capito...]

Tramite il calcolo infinitesimale si dà risposta a questi ed altri problemi e si riesce a descrivere i fenomeni naturali, sostanzialmente tramite l'utilizzo di principi di conservazione formulati in termini matematici, in conclusione accrescendo profondamente la comprensione del mondo fisico.

Nella dinamica abbiamo il principio di conservazione di Newton (enunciato nei "Principia Mathematica").

L'accelerazione $\vec{a}$ prodotta da una forza $\vec{f}$ su una massa m ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{f}$, ed è inversamente proporzionale alla massa m.

In formula (celeberrima):

$$\vec{f} = m\vec{a}\,.$$

Nella dinamica abbiamo il principio di conservazione di Newton (enunciato nei "Principia Mathematica").

L'accelerazione $\vec{a}$ prodotta da una forza $\vec{f}$ su una massa m ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{f}$, ed è inversamente proporzionale alla massa m.

In formula (celeberrima):

$$\vec{f} = m\vec{a} \, .$$

Un altro classico risultato: il principio di conservazione della massa.

La variazione (istantanea) della massa di fluido contenuta in un certo volume V è uguale al bilancio fra la quantità di materia entrata e la quantità di materia uscita in quell'istante attraverso la superficie S che delimita V.

Con il linguaggio e i simboli del calcolo infinitesimale (e qui la lettura è palesemente più difficile):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS\,,$$

o anche

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,.$$

Un altro classico risultato: il principio di conservazione della massa.

La variazione (istantanea) della massa di fluido contenuta in un certo volume V è uguale al bilancio fra la quantità di materia entrata e la quantità di materia uscita in quell'istante attraverso la superficie S che delimita V.

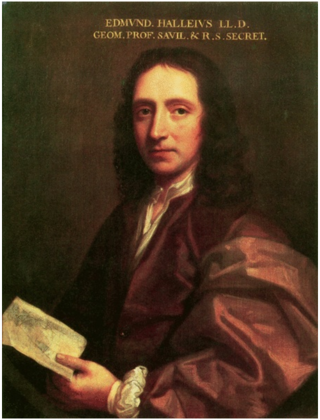
Con il linguaggio e i simboli del calcolo infinitesimale (e qui la lettura è palesemente più difficile):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \, ,$$

o anche

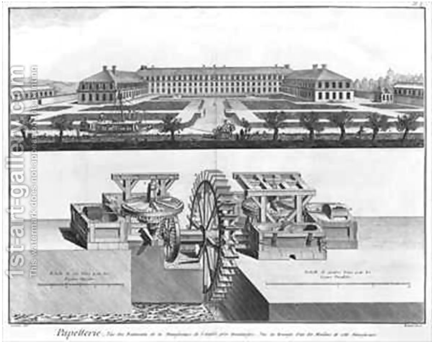
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \, .$$

Si apre la via alla predizione: ad esempio, l'astronomo Edmond Halley vide la cometa che porta il suo nome nel 1682, e, sulla base delle notizie dei due ultimi passaggi precedenti (1531 e 1607), dell'utilizzo delle leggi della dinamica di Newton e del calcolo infinitesimale, previde nel 1705 con significativa precisione il successivo passaggio nel 1759 (non ebbe la soddisfazione di verificare che sapeva prevedere il futuro: morì nel 1742).



Edmond Halley (1656–1742) e la sua cometa nel passaggio del 1986 (prossimo passaggio 2061: prenotate i posti in prima fila).

Nell'Europa del 1700 e 1800 la matematica innerva l'avanzamento culturale, in particolare all'interno dell'Illuminismo (d'Alembert era un matematico), e giorno dopo giorno sostiene lo sviluppo tecnologico e la rivoluzione industriale.



Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) e un'illustrazione dell'Encyclopédie (un mulino ad acqua).

La distanza fra la civiltà europea e le civiltà cinese e giapponese all'inizio del 1900 ha origini anche da un differente percorso di sviluppo scientifico, con conseguenze sulla tecnologia e l'economia.

La chiusura verso ciò che proviene dall'estero porta l'Oriente a mancare una svolta fondamentale.

Nelle dinastie cinesi Ming (1368–1644) e Qing (1644–1912) la matematica viene vista essenzialmente come strumento per le pratiche della vita quotidiana: serve per le applicazioni, ma in modo non innovativo, non è strumento per la modellizzazione, la comprensione e la simulazione dei fenomeni di natura, e quindi per il cambiamento.

Nel 1872 in Giappone, con la creazione dell'istruzione pubblica, il governo decise di sostituire la tradizionale matematica Wasan con la matematica occidentale; una delle ragioni che spinse a questa drastica scelta era che[3]

"lo Wasan non aveva coltivato i suoi legami con la meccanica e altre discipline classiche e quindi non ebbe la sua ramificazione di applicazioni nelle scienze applicate".

[3]H. Fujita Yashima, Scienze giapponesi tra l'Oriente e l'Occidente, tra la tradizione e la modernità, [senza data]

Ma ritorniamo ora alla questione principale: modellizzazione e simulazione.

Individuato un modello, per poter fare previsioni quantitative sul fenomeno considerato bisogna essere in grado di risolvere il problema.

Si è di fronte a una specie di paradosso: modellizzazione ha richiesto il passaggio dal discreto al continuo, simulazione richiede il passaggio dal continuo al discreto!

In che cosa consiste il processo di discretizzazione?

Bisogna trovare un problema approssimante con un numero finito (magari alto...) di incognite ed equazioni.
Due necessità

- le incognite siano associate a una soluzione approssimata dalla forma semplice, che possa essere facilmente usata nei calcoli necessari
- le equazioni derivino in modo ragionevole dal problema originale (principi di conservazione/minimizzazione su scala ridotta).

Un caso tipico:

- la regione dove si risolve il problema è spezzettata in parti di piccola misura e di forma semplice (triangoli/tetraedri, ...) [mesh]
- la soluzione approssimata è una funzione affine su ogni pezzetto $[a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3]$
- le equazioni nascono dalla minimizzazione della quantità fisica (energia) che guida il problema, fra tutte le funzioni di forma semplice.

Al termine del processo di discretizzazione (e di linearizzazione...) si deve risolvere un sistema lineare.

Alle scuole medie:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 5 - 3\alpha_1 \\ 2\alpha_1 - 4(5 - 3\alpha_1) = 3 \end{cases}$$

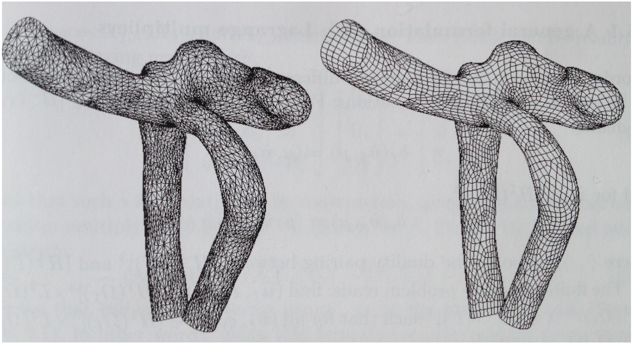
$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 5 - 3\alpha_1 \\ 14\alpha_1 = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 5 - \frac{69}{14} = \frac{1}{14} \\ \alpha_1 = \frac{23}{14} \end{cases} .$$

- Sembra facile... Facciamo lo stesso con milioni di equazioni e di incognite!

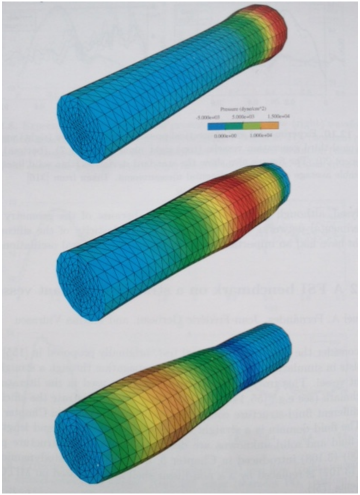
Qualche esempio di modellizzazione e simulazione:

- sistema cardiovascolare
- Coppa America di vela: Alinghi
- ingegneria elettrotecnica: il trasformatore “Hexaformer”

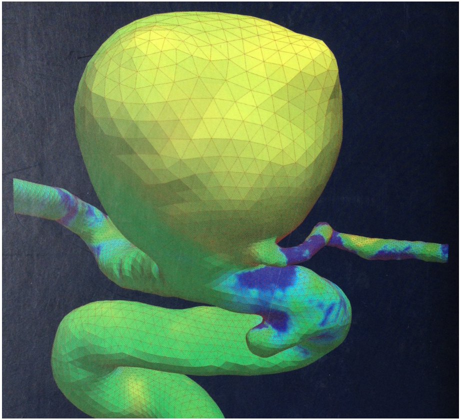
Sistema cardiovascolare



La descrizione della geometria: un tratto del sistema arterioso
(da "Cardiovascular Mathematics", L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani (eds), Springer, 2009).



La deformazione di un'arteria durante il passaggio del sangue
(da "Cardiovascular Mathematics", L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani (eds), Springer, 2009).



Un'arteria cerebrale con un aneurisma
(da "Cardiovascular Mathematics", L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani (eds), Springer, 2009).

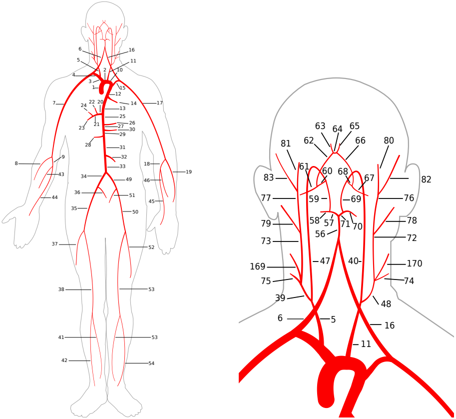
Un po' di matematica "dura": le equazioni!

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}, p) = \rho \mathbf{f}$$

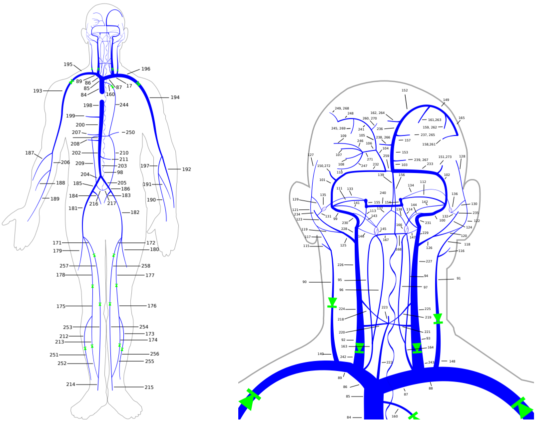
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \Delta^2_{x_1 x_2} \eta + \mu \frac{\partial \Delta^2_{x_1 x_2} \eta}{\partial t} = g + (\mathbf{T}(\mathbf{v}, p) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_3$$

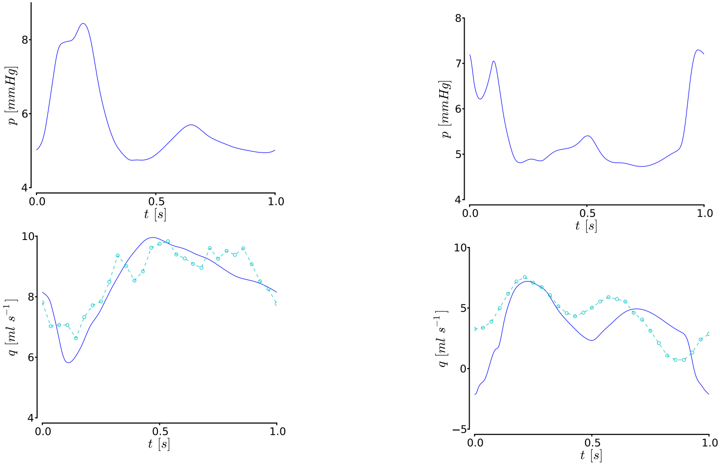


Modellizzazione del sistema arterioso
(cortesia di L.O. Müller e E.F. Toro, Trento).



Modellizzazione del sistema venoso

(cortesia di L.O. Müller e E.F. Toro, Trento).

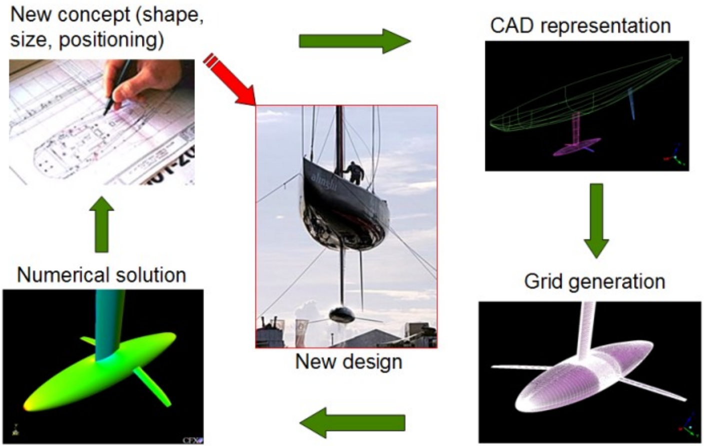


Pressione e intensità del flusso sanguigno in due vene della testa
(cortesia di L.O. Müller e E.F. Toro, Trento).

Coppa America di vela: Alinghi

La presentazione in società.

Svizzera, paese di grandi navigatori!



Il processo di progettazione

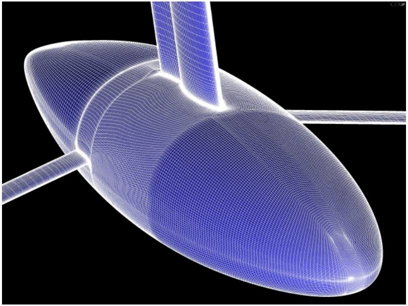
(cortesia di Chair of Modeling and Scientific Computing, EPFL, Lausanne).

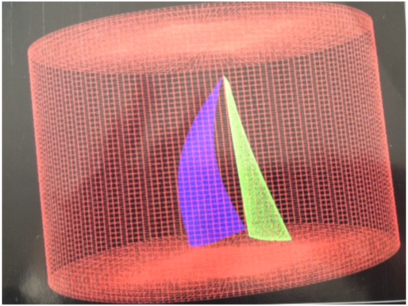
Gli aspetti più rilevanti sono velocità e manovrabilità:

- forma dello scafo e del bulbo
- forma delle vele.

Questioni computazionali:

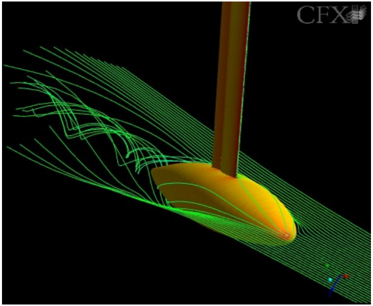
- 2003: 100 imbarcazioni (circa 30 milioni di equazioni ed incognite)
- 2007: 400 imbarcazioni (circa 160 milioni di equazioni ed incognite).

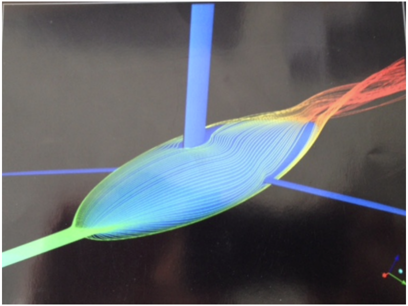




La descrizione della geometria: il bulbo con le alette e l'aria attorno alla barca

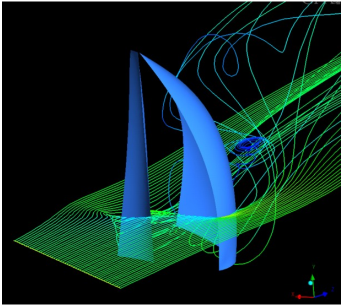
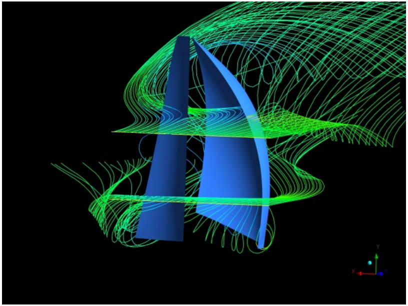
(cortesia di Chair of Modeling and Scientific Computing, EPFL, Lausanne).





Il flusso d'acqua attorno al bulbo

(cortesia di Chair of Modeling and Scientific Computing, EPFL, Lausanne).

Il flusso d'aria attorno alla barca e alle vele

(cortesia di Chair of Modeling and Scientific Computing, EPFL, Lausanne).

Azzurra (1983) e Il Moro di Venezia (1992).

Luna Rossa (2000) e Alinghi (2007).




La vela tagliata in alto!

Di nuovo un po' di matematica "dura": le equazioni!

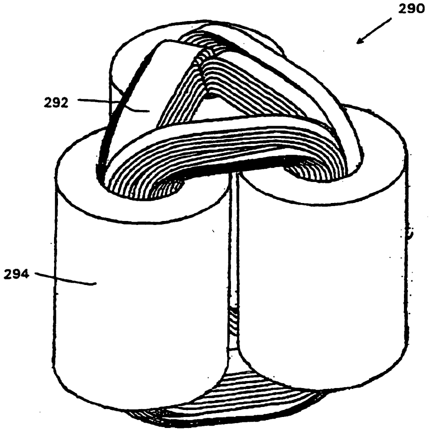
$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) - \nabla\cdot\mathbf{T}(\mathbf{v},p) = \rho\mathbf{f}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

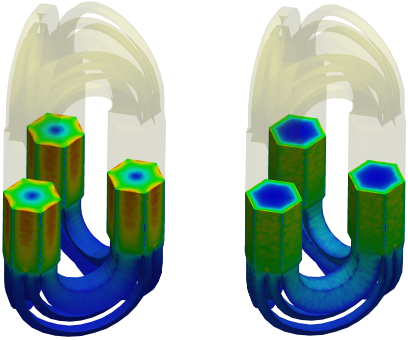
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \Delta^2_{x_1x_2}\eta + \mu\frac{\partial\Delta^2_{x_1x_2}\eta}{\partial t} = g + (\mathbf{T}(\mathbf{v},p)\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{e}_3$$

Ingegneria elettrotecnica: il trasformatore "Hexaformer"

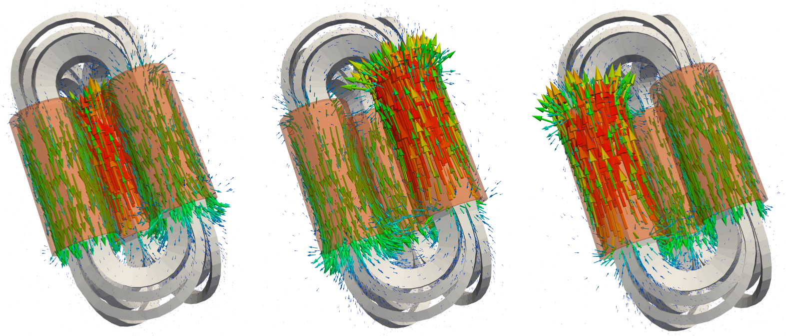


La geometria del trasformatore "Hexaformer".



La corrente indotta media in un periodo di tempo, a differente permeabilità magnetica

(risultati di A. Alonso Rodríguez, E. Bertolazzi, R. Ghiloni, A.V.).

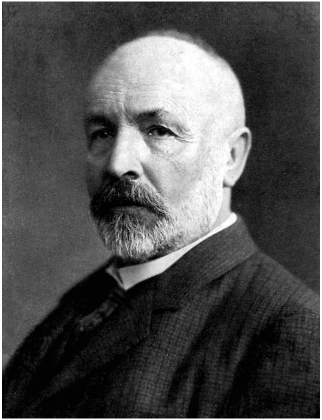
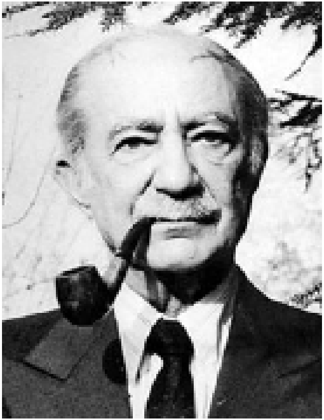


Il campo magnetico a tre differenti istanti
(risultati di A. Alonso Rodríguez, E. Bertolazzi, R. Ghiloni, A.V.).

Ottimizzazione della guida

Un filmato!

(cortesia di Matthias Gerdts, Monaco di Baviera, e Volkswagen).

L'ultimo confronto: Georg Cantor (1845–1918)
e Morris Kline (1908–1992).

Georg Cantor:

"Nel suo sviluppo la matematica è completamente libera e i suoi concetti sono limitati soltanto dalla necessità di essere non contraddittori e coordinati con concetti precedentemente introdotti tramite definizioni precise... L'essenza della matematica è nella sua libertà."

Georg Cantor:

"Nel suo sviluppo la matematica è completamente libera e i suoi concetti sono limitati soltanto dalla necessità di essere non contraddittori e coordinati con concetti precedentemente introdotti tramite definizioni precise... L'essenza della matematica è nella sua libertà."

Morris Kline:

Evidentemente la matematica non può fiorire né in una civiltà che guarda alla terra né in una che guarda al paradiso... Ha avuto il massimo splendore in un atmosfera intellettuale libera, che accoppia l'interesse per i problemi presentati dal mondo fisico con la volontà di pensare alle idee suggerite da questi problemi in un modo astratto che non promette ritorno immediato o pratico. La natura è la matrice da cui queste idee sono nate. Poi, paradossalmente, viene raggiunta una nuova visione della natura, una comprensione più ricca, più ampia, più potente, e questa a sua volta genera più profonde attività matematiche."

Morris Kline:

Evidentemente la matematica non può fiorire né in una civiltà che guarda alla terra né in una che guarda al paradiso... Ha avuto il massimo splendore in un atmosfera intellettuale libera, che accoppia l'interesse per i problemi presentati dal mondo fisico con la volontà di pensare alle idee suggerite da questi problemi in un modo astratto che non promette ritorno immediato o pratico. La natura è la matrice da cui queste idee sono nate. Poi, paradossalmente, viene raggiunta una nuova visione della natura, una comprensione più ricca, più ampia, più potente, e questa a sua volta genera più profonde attività matematiche."

Morris Kline:

Evidentemente la matematica non può fiorire né in una civiltà che guarda alla terra né in una che guarda al paradiso... Ha avuto il massimo splendore in un atmosfera intellettuale libera, che accoppia l'interesse per i problemi presentati dal mondo fisico con la volontà di pensare alle idee suggerite da questi problemi in un modo astratto che non promette ritorno immediato o pratico. La natura è la matrice da cui queste idee sono nate. Poi, paradossalmente, viene raggiunta una nuova visione della natura, una comprensione più ricca, più ampia, più potente, e questa a sua volta genera più profonde attività matematiche."