Metodi agli elementi finiti per equazioni di Maxwell a bassa frequenza

Alberto Valli

Dipartimento di Matematica

Università di Trento

Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}\,\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mathbf{curl}\,\mathcal{H} = -\boldsymbol{\sigma}\mathcal{E} - \mathcal{J}_e & \text{(Maxwell–Ampère)} \\ \boldsymbol{\mu}\,\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mathbf{curl}\,\mathcal{E} = \mathbf{0} & \text{(Faraday)} \end{cases} ,$$

dove $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$ sono i campi elettrico e magnetico, rispettivamente, $\boldsymbol{\epsilon}$ è la permittività elettrica, $\boldsymbol{\mu}$ è la permeabilità magnetica, $\boldsymbol{\sigma}$ è la conduttività, e $\mathcal{J}_e$ è la densità di corrente applicata.

Equazioni di Maxwell armoniche in tempo

Assumendo che

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(t,\mathbf{x}) &= \mathrm{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})\exp(i\omega t)] \\
\mathcal{H}(t,\mathbf{x}) &= \mathrm{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{x})\exp(i\omega t)] \\
\mathcal{J}_e(t,\mathbf{x}) &= \mathrm{Re}[\mathbf{J}_e(\mathbf{x})\exp(i\omega t)] \ ,
\end{aligned}
$$

ove $\omega \neq 0$ è la frequenza assegnata, si ottiene

$$
\begin{cases}
\mathbf{curl}\,\mathbf{H} - i\omega\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} = \mathbf{J}_e \\
\mathbf{curl}\,\mathbf{E} + i\omega\boldsymbol{\mu}\mathbf{H} = \mathbf{0}\,.
\end{cases}
$$

Equazioni di Maxwell armoniche in tempo a bassa frequenza

Nell'ipotesi di bassa frequenza, le correnti di spostamento $\boldsymbol{\epsilon}\,\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ possono essere trascurate. Si giunge così al problema

$$\begin{cases} \mathbf{curl}\,\mathbf{H} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} = \mathbf{J}_e & \text{in } \Omega \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} + i\omega\boldsymbol{\mu}\mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega\,. \end{cases} \tag{1}$$

Equazioni di Maxwell armoniche in tempo a bassa frequenza

Nell'ipotesi di bassa frequenza, le correnti di spostamento $\epsilon \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ possono essere trascurate. Si giunge così al problema

$$\begin{cases} \mathbf{curl}\, \mathbf{H} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} = \mathbf{J}_e & \text{in } \Omega \\ \mathbf{curl}\, \mathbf{E} + i\omega \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \,. \end{cases} \tag{1}$$

Ω è un dominio limitato di $\mathbf{R}^3$, composto da due parti: Ω^C, un conduttore interno a Ω, e Ω^I, il suo complementare, un isolante, ove la conduttività $\boldsymbol{\sigma}$ è nulla.

Equazioni di Maxwell armoniche in tempo a bassa frequenza

Nell'ipotesi di bassa frequenza, le correnti di spostamento $\boldsymbol{\epsilon}\,\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ possono essere trascurate. Si giunge così al problema

$$\begin{cases} \mathbf{curl}\,\mathbf{H} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} = \mathbf{J}_e & \text{in } \Omega \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} + i\omega\boldsymbol{\mu}\mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega\,. \end{cases} \tag{1}$$

Ω è un dominio limitato di $\mathbf{R}^3$, composto da due parti: Ω^C, un conduttore interno a Ω, e Ω^I, il suo complementare, un isolante, ove la conduttività $\boldsymbol{\sigma}$ è nulla.

La geometria di Ω^C e di Ω è generale, per cui si possono avere superfici di bordo non connesse, e con "manici".

Condizioni al bordo

Quanto alle condizioni al contorno, se, ad esempio, si considera una cavità Ω con bordo di metallo infinitamente permeabile, si impone

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \;\; \text{su } \partial\Omega\,. \tag{2}$$

Condizioni al bordo

Quanto alle condizioni al contorno, se, ad esempio, si considera una cavità Ω con bordo di metallo infinitamente permeabile, si impone

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ su } \partial\Omega \,. \tag{2}$$

In alternativa, su bordo perfettamente conduttore si impone

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ su } \partial\Omega \,.$$

Condizioni al bordo

Quanto alle condizioni al contorno, se, ad esempio, si considera una cavità Ω con bordo di metallo infinitamente permeabile, si impone

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ su } \partial\Omega \,. \tag{2}$$

In alternativa, su bordo perfettamente conduttore si impone

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ su } \partial\Omega \,.$$

Nel seguito, ci concentreremo soprattutto su (2).

Condizioni al bordo

Quanto alle condizioni al contorno, se, ad esempio, si considera una cavità Ω con bordo di metallo infinitamente permeabile, si impone

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \;\text{ su } \partial\Omega\,. \tag{2}$$

In alternativa, su bordo perfettamente conduttore si impone

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \;\text{ su } \partial\Omega\,.$$

Nel seguito, ci concentreremo soprattutto su (2).

- Problema: in un isolante si ha $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, per cui $\mathbf{E}$ non è univocamente determinata in quella regione ($\mathbf{E} + \nabla\psi$ è ancora soluzione).

Condizioni di "gauge"

Sono dunque necessarie delle condizioni aggiuntive (che sono dette di "gauge"):

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}) = 0 & \text{in } \Omega^I \\ \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3}$$

Condizioni di "gauge"

Sono dunque necessarie delle condizioni aggiuntive (che sono dette di "gauge"):

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}) = 0 & \text{in } \Omega^I \\ \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{3}$$

Altre condizioni di "gauge" sono necessarie in topologia generale:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_j} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall\, j = 1, \ldots, p_\Gamma \\ \int_{\Sigma_k} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall\, k = 1, \ldots, n_{\partial\Omega} \,. \end{cases} \tag{4}$$

Condizioni di "gauge"

Sono dunque necessarie delle condizioni aggiuntive (che sono dette di "gauge"):

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}) = 0 & \text{in } \Omega^I \\ \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3}$$

Altre condizioni di "gauge" sono necessarie in topologia generale:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_j} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall\, j = 1, \ldots, p_\Gamma \\ \int_{\Sigma_k} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall\, k = 1, \ldots, n_{\partial\Omega}\ . \end{cases} \tag{4}$$

[Le condizioni $\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0$ su $\partial\Omega$ e $\int_{\Sigma_k} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0$ devono essere modificate se la condizione al contorno è $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$.]

Condizioni di "gauge" (cont.)

Notazioni:

- Γ_j sono le componenti connesse dell'interfaccia Γ fra l'isolante Ω^I e il conduttore Ω_C
- $\Sigma_k \subset \Omega^I$ (con $\partial\Sigma_k \subset \partial\Omega$) sono le superfici che tagliano i cicli "singolari" su $\partial\Omega$ (cicli che non "bordano", cioè che non sono una componente connessa del bordo di una superficie contenuta in Ω^I, e che ha il complementare del suo bordo su Γ)

Condizioni di "gauge" (cont.)

Notazioni:

- Γ_j sono le componenti connesse dell'interfaccia Γ fra l'isolante Ω^I e il conduttore Ω_C
- $\Sigma_k \subset \Omega^I$ (con $\partial\Sigma_k \subset \partial\Omega$) sono le superfici che tagliano i cicli "singolari" su $\partial\Omega$ (cicli che non "bordano", cioè che non sono una componente connessa del bordo di una superficie contenuta in Ω^I, e che ha il complementare del suo bordo su Γ)

Le condizioni di "gauge" topologiche sono condizioni di ortogonalità allo spazio dei campi armonici in Ω^I (con opportune condizioni al contorno).

Esistenza e unicità

Le equazioni (1), (2), (3) e (4) formano il sistema di Maxwell, armonico in tempo, a bassa frequenza (anche detto: problema di "eddy-current" armonico in tempo).

Esistenza e unicità

Le equazioni (1), (2), (3) e (4) formano il sistema di Maxwell, armonico in tempo, a bassa frequenza (anche detto: problema di "eddy-current" armonico in tempo).

Questo problema:

Esistenza e unicità

Le equazioni (1), (2), (3) e (4) formano il sistema di Maxwell, armonico in tempo, a bassa frequenza (anche detto: problema di "eddy-current" armonico in tempo).

Questo problema:

- è ben posto (esistenza e unicità) [Alonso Rodríguez, Fernandes e V., EJAM 2003]

Esistenza e unicità

Le equazioni (1), (2), (3) e (4) formano il sistema di Maxwell, armonico in tempo, a bassa frequenza (anche detto: problema di "eddy-current" armonico in tempo).

Questo problema:

- è ben posto (esistenza e unicità) [Alonso Rodríguez, Fernandes e V., EJAM 2003]
- può essere riscritto in termini di solo campo magnetico $\mathbf{H}$ oppure di solo campo elettrico $\mathbf{E}$

Il problema per $\mathbf{H}$

Eliminando $\mathbf{E}$ si ottiene (in forma variazionale):

$$
\begin{cases}
\text{Determinare } \mathbf{H} \in \mathbf{V}^{\mathbf{J}_e} \text{ tale che:} \\[2ex]
\int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \, \mathbf{curl}\, \mathbf{H} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{v}} + i\omega \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{v}} \\
\qquad\qquad = \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{v}} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^{\mathbf{0}} \; .
\end{cases}
\tag{5}
$$

ove

$$
\mathbf{V}^{\mathbf{J}_e} := \{ \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \mid \mathbf{curl}\, \mathbf{v} = \mathbf{J}_e \text{ in } \Omega^I \} \; .
$$

Il problema per $\mathbf{H}$

Eliminando $\mathbf{E}$ si ottiene (in forma variazionale):

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Determinare } \mathbf{H} \in \mathbf{V}^{\mathbf{J}_e} \text{ tale che:} \\[2ex]
\displaystyle\int_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \, \mathbf{curl}\, \mathbf{H} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{v}} + i\omega \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{v}} \\
\qquad\qquad\qquad \displaystyle = \int_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{v}} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^{\mathbf{0}} \; .
\end{array}
\right.
\tag{5}
$$

ove

$$
\mathbf{V}^{\mathbf{J}_e} := \{ \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \,|\, \mathbf{curl}\, \mathbf{v} = \mathbf{J}_e \text{ in } \Omega^I \} \; .
$$

- Si noti: c'è il vincolo $\mathbf{curl}\, \mathbf{H} = \mathbf{J}_e$ in Ω^I.

Il problema per $\mathbf{E}$

Eliminando $\mathbf{H}$ si ottiene (in forma variazionale):

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Determinare } \mathbf{E} \in \mathbf{Z} \text{ tale che:} \\ &\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{\mathbf{curl}} \mathbf{E} \cdot \operatorname{\mathbf{curl}} \overline{\mathbf{z}} + i\omega \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{z}} \\ &\qquad\qquad = -i\omega \int\limits_{\Omega} \mathbf{J}_e \cdot \overline{\mathbf{z}} \qquad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{Z}\ . \end{aligned}\right. \tag{6}$$

ove

$$\mathbf{Z} := \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \,|\, \mathbf{z} \text{ soddisfa le condizioni di "gauge"}\}\ .$$

Il problema per E

Eliminando $\mathbf{H}$ si ottiene (in forma variazionale):

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Determinare } \mathbf{E} \in \mathbf{Z} \text{ tale che:} \\[2em] \displaystyle\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{-1}\, \mathbf{curl}\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{z}} + i\omega \int_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{z}} \\ \qquad\qquad\qquad \displaystyle = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_e \cdot \overline{\mathbf{z}} \qquad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{Z}\ . \end{array}\right. \tag{6}$$

ove

$\mathbf{Z} := \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega) \,|\, \mathbf{z}$ soddisfa le condizioni di "gauge"$\}$.

- Si noti: c'è il vincolo di "gauge" $\mathrm{div}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}) = 0$ in Ω^I.

Come trattare i vincoli?

L'utilizzo di elementi finiti in presenza dei vincoli di irrotazionalità e di solenoidalità è problematico, perché non è facile costruire una base di polinomi a tratti che soddisfi questi vincoli.

Come trattare i vincoli?

L'utilizzo di elementi finiti in presenza dei vincoli di irrotazionalità e di solenoidalità è problematico, perché non è facile costruire una base di polinomi a tratti che soddisfi questi vincoli.

- Problema: come operare?

Come trattare i vincoli?

L'utilizzo di elementi finiti in presenza dei vincoli di irrotazionalità e di solenoidalità è problematico, perché non è facile costruire una base di polinomi a tratti che soddisfi questi vincoli.

- Problema: come operare?

Ci sono vari metodi, con pregi e difetti!

I metodo: potenziali scalare e vettore

- Nel caso di irrotazionalità si può scrivere

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \nabla\psi + \boldsymbol{\rho} \text{ in } \Omega^I$$

dove $\mathbf{curl}\,\mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e$ in Ω^I e $\mathbf{H}_e \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$, e $\boldsymbol{\rho}$ è un particolare campo armonico

I metodo: potenziali scalare e vettore

- Nel caso di irrotazionalità si può scrivere

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \nabla\psi + \boldsymbol{\rho} \ \text{ in } \Omega^I$$

dove $\mathbf{curl}\,\mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e$ in Ω^I e $\mathbf{H}_e \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$, e $\boldsymbol{\rho}$ è un particolare campo armonico

- Nel caso di solenoidalità si può scrivere

$$\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} = \mathbf{curl}\,\mathbf{Q} \text{ in } \Omega^I$$

I metodo: potenziali scalare e vettore (cont.)

Però:

I metodo: potenziali scalare e vettore (cont.)

Però:

- per il potenziale scalare ψ si arriva ad una semplice equazione del secondo ordine:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\nabla\psi) = -\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_e) \quad \text{in } \Omega^I$$

I metodo: potenziali scalare e vettore (cont.)

Però:

- per il potenziale scalare ψ si arriva ad una semplice equazione del secondo ordine:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\nabla\psi) = -\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_e) \ \text{ in } \Omega^I$$

- per il potenziale vettore $\mathbf{Q}$ si arriva ad un'equazione del terzo ordine:

$$\mathbf{curl}[\boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathbf{curl}(\boldsymbol{\epsilon}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{Q})] = -i\omega\mathbf{J}_e \ \text{ in } \Omega^I\,,$$

che porta a un problema più complicato del precedente.

I metodo: potenziali scalare e vettore (cont.)

Però:

- per il potenziale scalare ψ si arriva ad una semplice equazione del secondo ordine:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\nabla\psi) = -\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_e) \ \text{ in } \Omega^I$$

- per il potenziale vettore $\mathbf{Q}$ si arriva ad un'equazione del terzo ordine:

$$\mathbf{curl}[\boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathbf{curl}(\boldsymbol{\epsilon}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{Q})] = -i\omega\mathbf{J}_e \ \text{ in } \Omega^I \,,$$

  che porta a un problema più complicato del precedente.

Dunque nel caso di solenoidalità bisogna trovare un'altra strada.

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$

Usando la decomposizione di $\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \nabla\psi + \boldsymbol{\rho}$ in Ω^I (e analogamente per le funzioni test $\mathbf{v}$) si giunge al problema:

$$
\begin{cases}
\text{Determinare } (\mathbf{H} - \mathbf{H}_e, \psi, \boldsymbol{\rho}) \in W \text{ tale che:} \\[2ex]
\displaystyle\int_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \,\mathbf{curl}\,\mathbf{H} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{v}} + i\omega \int_{\Omega^C} \boldsymbol{\mu}\mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{v}} \\
\qquad\qquad \displaystyle + i\omega \int_{\Omega^I} \boldsymbol{\mu}\nabla\psi \cdot \nabla\overline{\phi} + i\omega \int_{\Omega^I} \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\rho} \cdot \overline{\boldsymbol{\eta}} \\
\qquad \displaystyle = \int_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{v}} \\
\qquad\qquad \displaystyle - i\omega \int_{\Omega^I} \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_e \cdot \nabla\overline{\phi} - i\omega \int_{\Omega^I} \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_e \cdot \overline{\boldsymbol{\eta}} \quad \forall\, (\mathbf{v}, \phi, \boldsymbol{\eta}) \in W \ ,
\end{cases}
\tag{7}
$$

I metodo: risoluzione in $(\mathrm{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

ove

$$W := \{(\mathbf{v}, \phi, \boldsymbol{\eta}) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega^C) \times H^1(\Omega^I) \times \mathcal{H}(\Omega^I) \mid \\ \mid \phi_{|\partial\Omega} = 0\,,\ (\mathbf{v} - \nabla\phi - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma\}$$

e $\mathcal{H}(\Omega^I)$ è lo spazio dei campi armonici in Ω^I.

ove

$$W := \{(\mathbf{v}, \phi, \boldsymbol{\eta}) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega^C) \times H^1(\Omega^I) \times \mathcal{H}(\Omega^I) \, | \\ | \, \phi_{|\partial\Omega} = 0 \, , \, (\mathbf{v} - \nabla\phi - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma\}$$

e $\mathcal{H}(\Omega^I)$ è lo spazio dei campi armonici in Ω^I.

La risoluzione con elementi finiti non pone più problemi: si usano elementi finiti di tipo "edge" in Ω^C, e di tipo "nodale" (scalari) in Ω^I, però opportunamente raccordati su Γ [Bermúdez, Rodríguez e Salgado, SINUM 2002; Alonso Rodríguez, Fernandes e V., LNSCE 2003].

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L'implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L'implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

Pregi:

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L'implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

Pregi:

- usa il minimo di gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e uno scalare in Ω^I)

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L’implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

Pregi:

- usa il minimo di gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e uno scalare in Ω^I)

Difetti:

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L'implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

Pregi:

- usa il minimo di gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e uno scalare in Ω^I)

Difetti:

- richiede il calcolo preliminare di $\mathbf{H}_e$

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L’implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

Pregi:

- usa il minimo di gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e uno scalare in Ω^I)

Difetti:

- richiede il calcolo preliminare di $\mathbf{H}_e$
- richiede l’individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su Γ

I metodo: risoluzione in $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \psi_{|\Omega^I})$ (cont.)

L'implementazione può essere modificata in modo da non dover determinare una base dello spazio $\mathcal{H}(\Omega^I)$, ma solo dei semplici elementi finiti nodali che hanno un salto unitario attraverso le superfici che "tagliano" i cicli singolari su Γ.

Pregi:

- usa il minimo di gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e uno scalare in Ω^I)

Difetti:

- richiede il calcolo preliminare di $\mathbf{H}_e$
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su Γ
- non determina $\mathbf{E}_{|\Omega^I}$

II metodo: vincolo per "penalizzazione"

L'idea è di aggiungere all'equazione variazionale un termine di "penalizzazione" [Morisue, IEEE Trans. Mag. 1982]

$$
\begin{cases}
\text{Determinare } \mathbf{E} \in \mathbf{Z}_\sharp \text{ tale che:} \\
\\
\int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}^{-1} \,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{z}} + \int\limits_{\Omega^I} \mathrm{div}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\epsilon}\overline{\mathbf{z}}) + i\omega \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{z}} \\
\qquad\qquad = -i\omega \int\limits_\Omega \mathbf{J}_e \cdot \overline{\mathbf{z}} \qquad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{Z}_\sharp \ .
\end{cases}
\tag{8}
$$

ove

$$
\mathbf{Z}_\sharp \quad := \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega) \mid \mathrm{div}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{z}) \in L^2(\Omega^I) \text{ e } \mathbf{z} \text{ soddisfa le condizioni di "gauge" topologiche e su } \partial\Omega\} \ .
$$

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione"

Si dimostra in modo diretto che una soluzione di (8) soddisfa al vincolo di solenoidalità, e quindi è una soluzione del problema di eddy-current.

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione"

Si dimostra in modo diretto che una soluzione di (8) soddisfa al vincolo di solenoidalità, e quindi è una soluzione del problema di eddy-current.

Se la permittività elettrica ϵ è scalare e regolare in Ω^I, l'approssimazione con elementi finiti è ora standard: si usano elementi finiti di tipo "edge" in Ω^C e di tipo "nodale" in Ω^I, connettendoli su Γ in modo che le loro componenti tangenziali siano continue (per avere un'approssimazione "curl-conforme").

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione"

Si dimostra in modo diretto che una soluzione di (8) soddisfa al vincolo di solenoidalità, e quindi è una soluzione del problema di eddy-current.

Se la permittività elettrica $\boldsymbol{\epsilon}$ è scalare e regolare in Ω^I, l'approssimazione con elementi finiti è ora standard: si usano elementi finiti di tipo "edge" in Ω^C e di tipo "nodale" in Ω^I, connettendoli su Γ in modo che le loro componenti tangenziali siano continue (per avere un'approssimazione "curl-conforme").

Se invece la permittività elettrica $\boldsymbol{\epsilon}$ non è scalare e regolare in Ω^I, non è facile imporre che $(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{z}) \cdot \mathbf{n}$ sia continuo da elemento ad elemento.

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari

Il metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- usa relativamente pochi gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e un vettore "nodale" in Ω^I)

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- usa relativamente pochi gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e un vettore "nodale" in Ω^I)

Difetti:

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- usa relativamente pochi gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e un vettore "nodale" in Ω^I)

Difetti:

- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$ [questo avviene sempre quando si determina $\mathbf{E}_{|\Omega^I}$ per la condizione $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$]

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- usa relativamente pochi gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e un vettore "nodale" in Ω^I)

Difetti:

- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$ [questo avviene sempre quando si determina $\mathbf{E}_{|\Omega^I}$ per la condizione $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$]
- in Ω^I richiede $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \mathbf{I}$ con ϵ regolare

II metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con "penalizzazione" (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- usa relativamente pochi gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C e un vettore "nodale" in Ω^I)

Difetti:

- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$ [questo avviene sempre quando si determina $\mathbf{E}_{|\Omega^I}$ per la condizione $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ su $\partial\Omega$]
- in Ω^I richiede $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \mathbf{I}$ con ϵ regolare
- se la soluzione ha singolarità in Ω^I (angoli rientranti), non può essere approssimata con elementi "nodali"

III metodo: altri potenziali vettori e scalari

Quando ϵ non è costante, si può utilizzare una differente coppia di potenziali vettore e scalare: tenendo conto dell'equazione di Ampère, si può innanzitutto cercare un potenziale vettore $\mathbf{A}$ per $\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H} \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

III metodo: altri potenziali vettori e scalari

Quando ϵ non è costante, si può utilizzare una differente coppia di potenziali vettore e scalare: tenendo conto dell'equazione di Ampère, si può innanzitutto cercare un potenziale vettore $\mathbf{A}$ per $\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H} \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Poiché si potrebbe ritrovare $\mathbf{A} = -(i\omega)^{-1}\mathbf{E}$, ricadendo nel caso precedente, è opportuno correggere il campo elettrico in Ω^C con un potenziale scalare V:

$$\mathbf{A} = -(i\omega)^{-1}\mathbf{E} - \nabla V \quad \text{in}\ \Omega^C\,.$$

III metodo: altri potenziali vettori e scalari

Quando ϵ non è costante, si può utilizzare una differente coppia di potenziali vettore e scalare: tenendo conto dell'equazione di Ampère, si può innanzitutto cercare un potenziale vettore $\mathbf{A}$ per $\mu\mathbf{H}$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{A} = \mu\mathbf{H} \ \text{ in } \ \Omega\,.$$

Poiché si potrebbe ritrovare $\mathbf{A} = -(i\omega)^{-1}\mathbf{E}$, ricadendo nel caso precedente, è opportuno correggere il campo elettrico in Ω^C con un potenziale scalare V:

$$\mathbf{A} = -(i\omega)^{-1}\mathbf{E} - \nabla V \ \text{ in } \Omega^C\,.$$

[Commento: questo è un metodo usato molto spesso dagli ingegneri, a partire dagli anni ottanta.]

III metodo: altri potenziali vettori e scalari (cont.)

L'equazione di Faraday risulta automaticamente soddisfatta in Ω^C.
Imponendo l'equazione di Ampère in Ω si ottiene:

$$\mathbf{curl}(\boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{A}) + i\omega\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A} + i\omega\boldsymbol{\sigma}\nabla V = \mathbf{J}_e \ \text{ in } \Omega\,,$$

e nuovamente, dato che $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ in Ω^I, occorrono delle condizioni di "gauge" per $\mathbf{A}$.

III metodo: altri potenziali vettori e scalari (cont.)

L'equazione di Faraday risulta automaticamente soddisfatta in Ω^C.

Imponendo l'equazione di Ampère in Ω si ottiene:

$$\mathbf{curl}(\boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{A}) + i\omega\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A} + i\omega\boldsymbol{\sigma}\nabla V = \mathbf{J}_e \text{ in } \Omega\,,$$

e nuovamente, dato che $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ in Ω^I, occorrono delle condizioni di "gauge" per $\mathbf{A}$.

Siccome $\mathbf{A}$ non ha un preciso significato fisico, possiamo sceglierle come ("gauge" di Coulomb)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \text{ in } \Omega^I\,,\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ su } \partial\Omega\,,$$

oltre a $n_{\partial\Omega}$ condizioni di tipo topologico, associate ai cicli singolari su $\partial\Omega$.

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare

La solita "penalizzazione" per il vincolo di solenoidalità porta a

$$
\begin{cases}
\text{Determinare } (\mathbf{A}, V) \in \mathbf{X}_\sharp \times H^1_\sharp(\Omega^C) \text{ tale che:} \\[2ex]
\int\limits_\Omega (\boldsymbol{\mu}^{-1} \,\mathbf{curl}\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{w}} + \operatorname{div} \mathbf{A} \operatorname{div} \overline{\mathbf{w}}) \\
\qquad\qquad + i\omega \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A} + \nabla V) \cdot (\overline{\mathbf{w}} + \nabla \overline{\varphi}) \\
\qquad = \int\limits_\Omega \mathbf{J}_e \cdot \overline{\mathbf{w}} \\
\qquad\qquad + \int\limits_{\Omega^C} \mathbf{J}_e \cdot \nabla \overline{\varphi} + \int\limits_\Gamma \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{n}_I \overline{\varphi} \quad \forall\, (\mathbf{w}, \varphi) \in (\mathbf{W}_\sharp \times H^1_\sharp(\Omega^C))\ ,
\end{cases}
\tag{9}
$$

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

ove

$$\mathbf{X}_\sharp := \{\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \boldsymbol{H}(\mathrm{div};\Omega) \,|\, \mathbf{w} \text{ soddisfa le condizioni di "gauge" topologiche e su } \partial\Omega\}$$

$$H^1_\sharp(\Omega^C) := \{\varphi \in H^1(\Omega^C) \,|\, \varphi \text{ è a media nulla su ogni componente connessa di } \Omega^C\}\,.$$

ove

$$\mathbf{X}_\sharp \quad := \{\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \boldsymbol{H}(\mathrm{div};\Omega) \,|\, \mathbf{w} \text{ soddisfa le condizioni di "gauge" topologiche e su } \partial\Omega\}$$

$$H^1_\sharp(\Omega^C) \quad := \{\varphi \in H^1(\Omega^C) \,|\, \varphi \text{ è a media nulla su ogni componente connessa di } \Omega^C\}\,.$$

Si dimostra che questo problema è ben posto (esistenza e unicità), e che può essere approssimato con elementi finiti "nodali" sia per $\mathbf{A}$ che per V [Bíró e V., preprint 2005].

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

Difetti:

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "nodale" in Ω^C, un vettore "nodale" in Ω^I e uno scalare in Ω^C)

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "nodale" in Ω^C, un vettore "nodale" in Ω^I e uno scalare in Ω^C)
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "nodale" in Ω^C, un vettore "nodale" in Ω^I e uno scalare in Ω^C)
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$
- se la soluzione ha singolarità in Ω (angoli rientranti), non può essere approssimata con elementi "nodali"

III metodo: risoluzione con potenziali vettore e scalare (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "nodale" in Ω^C, un vettore "nodale" in Ω^I e uno scalare in Ω^C)
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$
- se la soluzione ha singolarità in Ω (angoli rientranti), non può essere approssimata con elementi "nodali"
- non determina $\mathbf{E}_{|\Omega^I}$

IV metodo: moltiplicatori di Lagrange

Come è noto, per risolvere un problema vincolato si possono introdurre dei moltiplicatori di Lagrange. Dunque il problema di "eddy-current" armonico in tempo si può riscrivere seguendo questo approccio, sia per il vincolo di solenoidalità che per quello di irrotazionalità.

IV metodo: moltiplicatori di Lagrange

Come è noto, per risolvere un problema vincolato si possono introdurre dei moltiplicatori di Lagrange. Dunque il problema di "eddy-current" armonico in tempo si può riscrivere seguendo questo approccio, sia per il vincolo di solenoidalità che per quello di irrotazionalità.

- Partendo dal problema in $\mathbf{H}$, si arriva ad un moltiplicatore di Lagrange che risulta essere il campo elettrico in Ω^I, che quindi richiede ulteriori condizioni di "gauge" (e dunque ulteriori vincoli e moltiplicatori di Lagrange). Il metodo è interessante, ma di un certo peso computazionale.

IV metodo: moltiplicatori di Lagrange

Come è noto, per risolvere un problema vincolato si possono introdurre dei moltiplicatori di Lagrange. Dunque il problema di "eddy-current" armonico in tempo si può riscrivere seguendo questo approccio, sia per il vincolo di solenoidalità che per quello di irrotazionalità.

- Partendo dal problema in $\mathbf{H}$, si arriva ad un moltiplicatore di Lagrange che risulta essere il campo elettrico in Ω^I, che quindi richiede ulteriori condizioni di "gauge" (e dunque ulteriori vincoli e moltiplicatori di Lagrange). Il metodo è interessante, ma di un certo peso computazionale.
- Partendo dal problema in $\mathbf{E}$ si arriva ad una formulazione più significativa.

IV metodo: risoluzione in E con moltiplicatore di Lagrange

Il problema diventa

$$\begin{cases} \text{Determinare } (\mathbf{E},\phi) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega) \times H^1_*(\Omega^I) \text{ tale che:} \\ \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{z}} + i\omega \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\cdot\overline{\mathbf{z}} + \int\limits_{\Omega^I} \boldsymbol{\epsilon}\nabla\phi\cdot\overline{\mathbf{z}} \\ \qquad\qquad = -i\omega \int\limits_{\Omega} \mathbf{J}_e\cdot\overline{\mathbf{z}} \\ \int\limits_{\Omega^I} \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}\cdot\nabla\overline{\eta} = 0 \\ \forall\,(\mathbf{z},\eta) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega) \times H^1_*(\Omega^I)\ , \end{cases} \tag{10}$$

ove

$$H^1_*(\Omega^I) := \{\eta \in H^1(\Omega^I)\,|\,\eta = 0 \text{ su } \Gamma_{p_\Gamma}\ ,\ \eta \text{ è costante su } \Gamma_j\}\ .$$

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

[Qui, per semplicità, si è assunto che $\partial\Omega$ non abbia "manici".]

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

[Qui, per semplicità, si è assunto che $\partial\Omega$ non abbia "manici".]

Si noti che le condizioni di "gauge" (3) e (4) sono equivalenti alla seconda equazione in (10), per cui i vincoli sono soddisfatti e si ritrova la soluzione del problema (6).

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

[Qui, per semplicità, si è assunto che $\partial\Omega$ non abbia "manici".]

Si noti che le condizioni di "gauge" (3) e (4) sono equivalenti alla seconda equazione in (10), per cui i vincoli sono soddisfatti e si ritrova la soluzione del problema (6). Inoltre, si dimostra facilmente che il moltiplicatore ϕ è in effetti nullo.

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

[Qui, per semplicità, si è assunto che $\partial\Omega$ non abbia "manici".]

Si noti che le condizioni di "gauge" (3) e (4) sono equivalenti alla seconda equazione in (10), per cui i vincoli sono soddisfatti e si ritrova la soluzione del problema (6). Inoltre, si dimostra facilmente che il moltiplicatore ϕ è in effetti nullo.

L'approssimazione numerica si può fare con elementi "edge" per $\mathbf{E}$ in Ω, e con elementi "nodali" per ϕ in Ω^I [Kanayama, Tagami, Saito e Kikuchi, JJIAM 2001; Alonso Rodríguez e V., ECCOMAS 2004].

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ (per essere formulato..., ma le proprietà di convergenza...)

IV metodo: risoluzione in E con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ (per essere formulato..., ma le proprietà di convergenza...)
- non ha problemi di angoli rientranti

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ (per essere formulato..., ma le proprietà di convergenza...)
- non ha problemi di angoli rientranti

Difetti:

IV metodo: risoluzione in $\mathbf{E}$ con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ (per essere formulato..., ma le proprietà di convergenza...)
- non ha problemi di angoli rientranti

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C, un vettore "edge" in Ω^I e uno scalare in Ω^I)

IV metodo: risoluzione in E con moltiplicatore di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ (per essere formulato..., ma le proprietà di convergenza...)
- non ha problemi di angoli rientranti

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C, un vettore "edge" in Ω^I e uno scalare in Ω^I)
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange

La loro struttura è tipicamente questa

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

mentre il problema vincolato si può scrivere come

$$\begin{cases} \text{Determinare } E \text{ con } \ BE = g \text{ e tale che:} \\ AE \cdot v = f \cdot v \\ \forall\, v \text{ tale che } Bv = 0\,. \end{cases}$$

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange

La loro struttura è tipicamente questa

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

mentre il problema vincolato si può scrivere come

$$\begin{cases} \text{Determinare } E \text{ con } BE = g \text{ e tale che:} \\ AE \cdot v = f \cdot v \\ \forall\, v \text{ tale che } Bv = 0\,. \end{cases}$$

È chiaro che una soluzione E di $(*)$ è anche soluzione del problema vincolato, poiché $B^T\eta \cdot v = \eta \cdot Bv = 0$ per ogni v che soddisfi $Bv = 0$.

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

D'altro canto, se A è invertibile sul nucleo di B e il nucleo di B^T è triviale, allora $(*)$ è ben posto (esistenza e unicità).

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

D'altro canto, se A è invertibile sul nucleo di B e il nucleo di B^T è triviale, allora $(*)$ è ben posto (esistenza e unicità). Infatti da queste ipotesi si ha che si può trovare $\hat{E}$ tale che $B\hat{E} = g$, e poi risolvere

$$\begin{cases} \text{Determinare } \hat{w} \text{ con } \; B\hat{w} = 0 \text{ e tale che:} \\ A\hat{w} \cdot v = (f - A\hat{E}) \cdot v \\ \forall \; v \text{ tale che } Bv = 0 \; . \end{cases}$$

Ponendo $E = \hat{w} + \hat{E}$ si ha $BE = g$.

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

D'altro canto, se A è invertibile sul nucleo di B e il nucleo di B^T è triviale, allora $(*)$ è ben posto (esistenza e unicità).
Infatti da queste ipotesi si ha che si può trovare $\hat{E}$ tale che $B\hat{E} = g$, e poi risolvere

$$\begin{cases} \text{Determinare } \hat{w} \text{ con } \; B\hat{w} = 0 \text{ e tale che:} \\ A\hat{w} \cdot v = (f - A\hat{E}) \cdot v \\ \forall \; v \text{ tale che } Bv = 0 \; . \end{cases}$$

Ponendo $E = \hat{w} + \hat{E}$ si ha $BE = g$. Inoltre, $f - AE$ è ortogonale al nucleo di B, per cui si trova η tale che $B^T\eta = f - AE$.

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

D'altro canto, se A è invertibile sul nucleo di B e il nucleo di B^T è triviale, allora $(*)$ è ben posto (esistenza e unicità).

Infatti da queste ipotesi si ha che si può trovare $\hat{E}$ tale che $B\hat{E} = g$, e poi risolvere

$$\begin{cases} \text{Determinare } \hat{w} \text{ con } \; B\hat{w} = 0 \text{ e tale che:} \\ A\hat{w} \cdot v = (f - A\hat{E}) \cdot v \\ \forall\ v \text{ tale che } Bv = 0\ . \end{cases}$$

Ponendo $E = \hat{w} + \hat{E}$ si ha $BE = g$. Inoltre, $f - AE$ è ortogonale al nucleo di B, per cui si trova η tale che $B^T\eta = f - AE$.

[Si ricordi: nucleo $(K^T) =$ (immagine $(K))^\perp$.]

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

La condizione che il nucleo di B^T sia triviale si può riscrivere nella forma (condizione di inf–sup)

$$\inf_{\eta} \sup_{v} \frac{B^T \eta \cdot v}{||\eta|| \, ||v||} > 0 \ . \qquad (**)$$

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

La condizione che il nucleo di B^T sia triviale si può riscrivere nella forma (condizione di inf–sup)

$$\inf_\eta \sup_v \frac{B^T\eta \cdot v}{||\eta||\,||v||} > 0\ . \qquad (**)$$

Per elementi finiti, è importante che $(**)$ sia soddisfatta uniformemente in h.

Due parole sui problemi con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

La condizione che il nucleo di B^T sia triviale si può riscrivere nella forma (condizione di inf–sup)

$$\inf_{\eta} \sup_{v} \frac{B^T \eta \cdot v}{||\eta|| \, ||v||} > 0 \; . \qquad (**)$$

Per elementi finiti, è importante che $(**)$ sia soddisfatta uniformemente in h.
In particolare, $(**)$ è una condizione di compatibilità fra lo spazio di elementi finiti che si usa per v e quello che si usa per η.

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange

Per concludere, qualche osservazione aggiuntiva.

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange

Per concludere, qualche osservazione aggiuntiva.

- Ci sono anche formulazioni che usano un campo in una regione e l'altro nell'altra: $(\mathbf{E}_{|\Omega^C}, \mathbf{H}_{|\Omega^I})$ oppure $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I})$.

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange

Per concludere, qualche osservazione aggiuntiva.

- Ci sono anche formulazioni che usano un campo in una regione e l'altro nell'altra: $(\mathbf{E}_{|\Omega^C}, \mathbf{H}_{|\Omega^I})$ oppure $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I})$.
  Per il primo approccio il moltiplicatore di Lagrange risulta essere il campo elettrico in Ω^I, che, dovendo soddisfare alle condizioni di "gauge", necessita di ulteriori moltiplicatori: dunque il metodo ha un certo peso computazionale.

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange

Per concludere, qualche osservazione aggiuntiva.

- Ci sono anche formulazioni che usano un campo in una regione e l'altro nell'altra: $(\mathbf{E}_{|\Omega^C}, \mathbf{H}_{|\Omega^I})$ oppure $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I})$.
  Per il primo approccio il moltiplicatore di Lagrange risulta essere il campo elettrico in Ω^I, che, dovendo soddisfare alle condizioni di "gauge", necessita di ulteriori moltiplicatori: dunque il metodo ha un certo peso computazionale.
  Il secondo approccio invece è relativamente economico, e rispetto a quello in campo elettrico ha il vantaggio di permettere mesh che non si raccordano su Γ [Alonso Rodríguez, Hiptmair e V., NMPDEs 2005].

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

- Per il caso $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I})$, a monte dell'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange, la struttura iniziale ha questa forma:

$$
\begin{cases}
\text{Determinare } (\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I}) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega^C) \times \mathbf{Z}_I \text{ tale che:} \\[2em]
\int\limits_{\Omega^C} (\boldsymbol{\sigma}^{-1} \, \mathbf{curl}\, \mathbf{H} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{v}} + i\omega\boldsymbol{\mu}\mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{v}}) + \int\limits_{\Gamma} \overline{\mathbf{v}} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \\
\qquad\qquad = \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{v}} \\
\int\limits_{\Gamma} \mathbf{H} \times \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{z}} + i\omega^{-1} \int\limits_{\Omega^I} \boldsymbol{\mu}^{-1} \, \mathbf{curl}\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{z}} = \int\limits_{\Omega^I} \mathbf{J}_e \cdot \overline{\mathbf{z}} \\[2em]
\forall\ (\mathbf{v}, \mathbf{z}) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega^C) \times \mathbf{Z}_I \ .
\end{cases}
\tag{11}
$$

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

- Per il caso $(\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I})$, a monte dell'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange, la struttura iniziale ha questa forma:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Determinare } (\mathbf{H}_{|\Omega^C}, \mathbf{E}_{|\Omega^I}) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega^C) \times \mathbf{Z}_I \text{ tale che:} \\ \\ \int\limits_{\Omega^C} (\boldsymbol{\sigma}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{v}} + i\omega\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}\cdot\overline{\mathbf{v}}) + \int\limits_{\Gamma} \overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} \\ \qquad\qquad = \int\limits_{\Omega^C} \boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{J}_e\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{v}} \\ \int\limits_{\Gamma} \mathbf{H}\times\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{z}} + i\omega^{-1}\int\limits_{\Omega^I} \boldsymbol{\mu}^{-1}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{z}} = \int\limits_{\Omega^I} \mathbf{J}_e\cdot\overline{\mathbf{z}} \\ \\ \forall\ (\mathbf{v},\mathbf{z}) \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl};\Omega^C)\times\mathbf{Z}_I\ . \end{array}\right. \tag{11}$$

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

ove

$\mathbf{Z}_I := \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega^I) \,|\, \mathbf{z}$ soddisfa le condizioni di "gauge"$\}$.

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

ove

$\mathbf{Z}_I := \{ \mathbf{z} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{curl}; \Omega^I) \,|\, \mathbf{z}$ soddisfa le condizioni di "gauge"$\}$.

L'approssimazione numerica con elementi finiti (di tipo "edge") richiede qualche attenzione, soprattutto per ottenere la condizione di inf–sup uniformemente in h.

Per tale ragione, si finisce per dover tener conto di un vincolo ulteriore ($\mathbf{curl}\,\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ su Γ) e per dover sostituire al campo elettrico un potenziale vettore del campo magnetico, infine ottenendo con queste modifiche un'approssimazione numerica efficiente.

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ
- non ha problemi di angoli rientranti

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ
- non ha problemi di angoli rientranti
- non richiede raccordo delle mesh su Γ

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ
- non ha problemi di angoli rientranti
- non richiede raccordo delle mesh su Γ

Difetti:

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ
- non ha problemi di angoli rientranti
- non richiede raccordo delle mesh su Γ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C, un vettore "edge" in Ω^I, uno scalare in Ω^I e uno scalare su Γ)

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ
- non ha problemi di angoli rientranti
- non richiede raccordo delle mesh su Γ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C, un vettore "edge" in Ω^I, uno scalare in Ω^I e uno scalare su Γ)
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$

Altre formulazioni con moltiplicatori di Lagrange (cont.)

Pregi:

- non richiede calcoli preliminari
- non richiede ipotesi su ϵ
- non ha problemi di angoli rientranti
- non richiede raccordo delle mesh su Γ

Difetti:

- usa più gradi di libertà (un vettore "edge" in Ω^C, un vettore "edge" in Ω^I, uno scalare in Ω^I e uno scalare su Γ)
- richiede l'individuazione delle superfici di "taglio" per i cicli singolari su $\partial\Omega$
- non determina $\mathbf{E}_{|\Omega^I}$