

**Diario del corso di Analisi Matematica 1**  
**(a.a. 2018/19)**

- 17 settembre 2018 (2 ore)  
[Presentazione del corso di studi, da parte del Direttore di Dipartimento.]
- 19 settembre 2018 (2 ore)  
Presentazione del corso. Numeri naturali, interi, razionali, reali.  $\sqrt{2}$  non è razionale. Come si risolve  $x^2 + 1 = 0$ ?
- 20 settembre 2018 (2 ore)  
Funzioni di variabile reale a valori reali. Potenze ad esponente intero positivo, polinomi. L'approssimazione polinomiale è efficace. Funzioni razionali. Radice  $k$ -esima, potenze (con base positiva) ad esponente razionale positivo.  $x^0 = 1$ . Potenze (con base positiva) ad esponente razionale di segno qualsiasi.
- 21 settembre 2018 (2 ore)  
Potenze (con base positiva) ad esponente reale, esponenziali. Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente). Funzione distanza dall'origine (modulo, valore assoluto). Funzioni crescenti/decrescenti (monotone), periodiche, pari, dispari, limitate. Composizione di funzioni.
- 25 settembre 2018 (1 ora)  
[24 settembre 2018, a esercitazione: Funzione inversa. Funzioni elementari inverse: radici, logaritmi, arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive (biunivoche).]  
Numeri complessi: forma algebrica. Rappresentazione nel piano. Somma, prodotto, rapporto. Parte reale e parte immaginaria, coniugato, modulo.
- 26 settembre 2018 (2 ore)  
Forma trigonometrica di un numero complesso. Prodotto e potenze in forma trigonometrica. Formula di Eulero:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Forma esponenziale di un numero complesso. Potenze e radici  $k$ -esime.
- 27 settembre 2018 (2 ore)  
Esempi ed esercizi tipici sui numeri complessi. Limiti: motivazioni del concetto. Definizioni formali.
- 28 settembre 2018 (2 ore)  
Proprietà (somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto). Estensione dell'algebra dei limiti ai casi non coperti dalla teoria standard (funzioni che tendono all'infinito). Forme indeterminate:  $+\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ .
- 2 ottobre 2018 (2 ore)  
Limiti: eventuale non esistenza, unicità. Massimo e minimo di un insieme. Maggioranti e minoranti di un insieme. Il minimo dei maggioranti esiste sempre: estremo superiore. Il massimo dei minoranti esiste sempre: estremo inferiore. Successioni: definizione. Successioni e funzioni limitate, limitate superiormente, limitate inferiormente. Le successioni monotone o convergono o divergono. Il numero 
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- 3 ottobre 2018 (2 ore)  
Massimo e minimo, maggioranti e minoranti, estremo superiore e estremo inferiore di una funzione o di una successione. Limite per  $x \rightarrow 0$  di  $\frac{e^x - 1}{x}$ ,  $\frac{\log(1+x)}{x}$  (e analoghi risultati in base  $A$ ). Teorema di compressione (o “dei due carabinieri”). Limite per  $x \rightarrow 0$  di  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ,  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ ,  $\frac{\operatorname{arcsin} x}{x}$ . Gerarchia di infiniti.
- 5 ottobre 2018 (2 ore)  
Gerarchia di infinitesimi. Esempi ed esercizi. Funzione (successione) limitata per funzione (successione) infinitesima è infinitesima. Funzione (successione) convergente è localmente limitata (globalmente limitata). Teoremi della permanenza del segno.
- 9 ottobre 2018 (2 ore)  
Teoremi della permanenza del segno: conclusione della discussione. Funzioni continue: definizione. Esempi di discontinuità: salto, eliminabile, oscillazioni non smorzate “impacchettate” in un intervallo di lunghezza arbitrariamente piccola. Proprietà delle funzioni continue: somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto, composizione. Inversa di funzione continua su un intervallo è continua. Teorema di esistenza degli zeri: metodo di bisezione.
- 10 ottobre 2018 (2 ore)  
Teorema di esistenza degli zeri: conclusione della discussione. Stima dell’errore di approssimazione nel metodo di bisezione. Teorema dei valori intermedi. Esercizi sul teorema di esistenza degli zeri. Teorema di Weierstrass: enunciato, osservazioni sulle ipotesi, dimostrazione.
- 11 ottobre 2018 (2 ore)  
Teorema di Bolzano-Weierstrass. Varianti del teorema di Weierstrass. Derivata e derivabilità: definizione. Retta tangente come limite di rette secanti. Retta tangente come retta di migliore approssimazione. Differenziabilità: definizione. Derivabilità e differenziabilità sono equivalenti.
- 12 ottobre 2018 (2 ore)  
La derivabilità implica la continuità. Regole di derivazione: somma, prodotto per costanti, prodotto, reciproco, rapporto. Derivata di funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata di  $x^k$  ( $k \geq 0$ );  $e^x$ ;  $A^x$ ;  $\sin x$ ;  $\cos x$ ;  $\operatorname{tg} x$ ;  $x^r$  ( $r \in \mathbf{R}, x > 0$ );  $\log x$ .
- 16 ottobre 2018 (1 ora)  
Derivata di  $\operatorname{arcsin} x$ ;  $\operatorname{arccos} x$ ;  $\operatorname{arctg} x$ . Funzioni iperboliche:  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ . Esempi ed esercizi. Metodo di Newton.
- 17 ottobre 2018 (2 ore)  
Metodo di Erone. Massimi e minimi relativi ed assoluti: generalità. Teorema di Fermat. Massimi e minimi in un intervallo chiuso e limitato. Esempi ed esercizi su massimi e minimi in un intervallo chiuso e limitato.
- 18 ottobre 2018 (2 ore)  
Se  $f$  è derivabile e crescente, allora  $f' \geq 0$ . Teorema di Lagrange. Teoremi di Rolle e di Cauchy. Esempi. Se  $f$  è definita in un intervallo ed è derivabile con  $f' \geq 0$  (rispettivamente,  $f' > 0$ ), allora  $f$  è crescente (rispettivamente, strettamente crescente). Se  $f$  è definita in un intervallo ed è derivabile con  $f' = 0$ , allora  $f$  è costante.

- 19 ottobre 2018 (2 ore)  
Regola di de l'Hôpital. Derivabilità come limite di derivate. Esempi ed esercizi. Asintoti obliqui.
- 24 ottobre 2018 (2 ore)  
Asintoti obliqui: esempi ed esercizi. Convessità e concavità: definizione. Caratterizzazione tramite il segno di  $f''$ . Convessità e retta tangente. Punti di flesso. Azzezzamento di  $f''$  nei punti di flesso. Esempi. Segno di  $f''$  e punti di massimo e minimo relativo.
- 25 ottobre 2018 (2 ore)  
Studio di grafici. Esempi ed esercizi. Approssimazione polinomiale: derivazione del polinomio approssimante. Primi esempi.
- 26 ottobre 2018 (2 ore)  
Polinomio di Taylor di grado  $N$  e formula di approssimazione di Taylor (con resto in forma di Peano). Sviluppo di  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ . Esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor.
- 5 novembre 2018 (1 ora)  
Sviluppo di  $\log(1+x)$ ,  $\tan x$ . Sviluppo di  $\frac{1}{1-x}$ ; cenni allo sviluppo di  $\frac{1}{1+x^2}$ ,  $\operatorname{arctg} x$ .
- 7 novembre 2018 (2 ore)  
Infinitesimi di ordine superiore  $o(x^k)$  e loro proprietà. Ulteriori esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor. Polinomio di Taylor come unico polinomio che coincide con la funzione fino alla derivata  $N$ -esima.
- 8 novembre 2018 (2 ore)  
Formula di Taylor con resto di Lagrange. Controllo dell'errore in funzione di  $N$ . Sviluppo in grande di  $e^x$ ;  $\sin x$ ;  $\cos x$ ;  $\log(1+x)$  (per  $-1 < x \leq 1$ ). Calcolo approssimato di  $\cos \frac{1}{2}$ . Serie numeriche: introduzione. Achille e la tartaruga.
- 9 novembre 2018 (2 ore)  
Serie numeriche: definizione di convergenza, divergenza, indeterminazione. Condizione necessaria per la convergenza. Serie geometriche. Serie telescopiche. Serie di Mengoli. Le serie a termini positivi o convergono o divergono positivamente. Criterio di confronto.
- 13 novembre 2018 (1 ora)  
Criterio di confronto asintotico. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  è convergente. Serie armoniche generalizzate  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ : convergenza per  $\alpha > 1$ . Criteri del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.
- 14 novembre 2018 (2 ore)  
Criterio di convergenza assoluta. Criterio di Leibniz. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  è divergente. I numeri periodici come numeri razionali. Esempi ed esercizi. Serie di potenze e serie di Taylor. Raggio di convergenza di una serie di potenze e suo calcolo.

- 15 novembre 2018 (2 ore)  
Serie di Taylor di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$  (per  $-1 < x \leq 1$ ). Derivazione ed antiderivazione termine a termine. Esempio di funzione  $C^\infty$  che non coincide con la sua serie di Taylor.
- 16 novembre 2018 (2 ore)  
Esercizi su derivazione ed antiderivazione termine a termine per serie di potenze. Serie di potenze in campo complesso. Serie di Taylor: rivisitazione per  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ . Formula di Eulero. La funzione di Weierstrass, continua e mai derivabile: definizione e osservazioni.
- 20 novembre 2018 (1 ora)  
La serie binomiale. La funzione zeta di Riemann.
- 21 novembre 2017 (2 ore) / 28 novembre 2017 (2 ore)  
Integrali: definizione come limite di somme di Cauchy–Riemann (limite di somme di aree di rettangoli approssimanti). Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni monotone sono integrabili. Esempio di funzione non integrabile. Proprietà dell'integrale: linearità, positività, monotonia, additività. Calcolo dell'integrale di  $x$  e di  $x^2$  con le somme di Cauchy–Riemann (esempio di Gauss). Versione intuitiva del teorema fondamentale del calcolo.
- 22 novembre 2017 (2 ore)  
Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Esempi ed esercizi di integrazione diretta. Integrazione per parti: formula, esempi ed esercizi.
- 23 novembre 2017 (2 ore)  
Integrazione per cambiamento di variabile. Integrale di  $\sqrt{a^2 - x^2}$ : area del cerchio. Integrale di  $\sqrt{a^2 + x^2}$  e di  $\sqrt{x^2 - a^2}$ .
- 27 novembre 2018 (1 ora)  
Volume di solidi di rotazione, principio di Cavalieri. Volume della sfera. Volume della piramide. Volume del cono circolare retto. Volume di un cono generico.
- 28 novembre 2018 (2 ore)  
Volume del toro. Cenni al teorema di Pappo. Lunghezza di grafici, aree di superfici di rotazione. Area della superficie della sfera. Area della superficie della sfera come derivata del volume; volume della sfera come integrale dell'area della superficie. Legge della quarta potenza in idraulica: descrizione del problema.
- 29 novembre 2018 (2 ore)  
Legge della quarta potenza in idraulica: calcolo della portata. Cambiamento di variabile  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  (cioè  $t = \tan \frac{x}{2}$ ). Esempi ed esercizi.
- 30 novembre 2018 (2 ore)  
Serie di Fourier: generalità, calcolo dei coefficienti per periodo  $2\pi$ . Serie di Fourier: risultato di convergenza.
- 4 dicembre 2018 (1 ora)  
Serie di Fourier di soli seni per funzioni dispari e serie di Fourier di soli coseni per funzioni pari. Serie di Fourier per funzioni prolungate periodiche, prolungate pari o prolungate dispari. Serie di Fourier per periodo  $T > 0$ . Esercizi: calcolo esplicito di alcuni coefficienti di Fourier;  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

- 5 dicembre 2018 (2 ore)  
Integrali impropri: generalità. Integrali impropri all'infinito: definizione. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi. Integrabilità all'infinito di  $x^{-\alpha}$  per  $\alpha > 1$ . Integrabilità all'infinito di  $\frac{\sin x}{x}$ . Non integrabilità all'infinito di  $\frac{|\sin x|}{x}$ .
- 6 dicembre 2018 (2 ore)  
Criterio di convergenza integrale per le serie. Convergenza di  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  per  $1 < \alpha < 2$ .  
Integrali impropri al finito. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi ed esercizi. La funzione  $\Gamma(x)$ .
- 7 dicembre 2018 (2 ore)  
Integrale di  $e^{-x^2}$  sulla retta reale. Equazioni differenziali: generalità. Ordine, linearità/non linearità. Esempi. Non unicità della soluzione.
- 11 dicembre 2018 (1 ora)  
Problema di Cauchy. Equazioni differenziali nonlineari del primo ordine a variabili separabili.
- 12 dicembre 2018 (2 ore)  
Esempi ed esercizi sulle equazioni nonlineari del primo ordine a variabili separabili: crescita con effetto di soglia, datazione al carbonio 14. Equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee e non-omogenee. Caso omogeneo: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Caso non-omogeneo: struttura dell'insieme delle soluzioni.
- 13 dicembre 2018 (2 ore)  
Caso non-omogeneo: determinazione della soluzione particolare (metodo di variazione della costante arbitraria), soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Esempi ed esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Soluzione generale dell'equazione omogenea: polinomio associato.
- 14 dicembre 2018 (2 ore)  
Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee. Metodo di variazione delle costanti (cenni). Metodo di somiglianza (esponenziali, seni/coseni, polinomi). Esempi ed esercizi.