Forme quadratiche

- Qualche premessa.
  1. Fra matrici è definito il prodotto righe per colonne, per cui facendo il prodotto di una matrice A di dimensioni $m \times n$ (con elementi A_{rj}, $r = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) e di una matrice B di dimensioni $n \times p$ (con elementi B_{js}, $j = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, p$) , si ottiene una matrice $Q = AB$ di dimensioni $m \times p$, i cui elementi sono dati da $Q_{rs} = \sum_{j=1}^{n} A_{rj} B_{js}$, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, p$.
     In particolare, si può pensare il prodotto di una matrice A per un vettore $\vec{v}$ come prodotto righe per colonne della matrice A e della matrice colonna data dal vettore $\vec{v}$: il risultato è un vettore $A\vec{v}$ di componenti $(A\vec{v})_r = \sum_{j=1}^{d} A_{rj} v_j$, $r = 1, \ldots, m$.
  2. Nel seguito considereremo una matrice (reale) A di dimensioni $d \times d$ e simmetrica (cioè, essendo $A_{ij} \in \mathbf{R}$ i suoi elementi, essi soddisfano la proprietà $A_{ij} = A_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, d$). Ad essa è associata la forma quadratica $\Phi(\vec{v}) = A\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} v_j v_i$, con $\vec{v} \in \mathbf{R}^d$, che è un polinomio di secondo grado nelle variabili $v_1, \ldots, v_d$.
  3. Una matrice (reale) simmetrica A ha autovalori reali, e ha una base ortonormale di autovettori (reali): cioè, i numeri λ_j, $j = 1, \ldots, d$, per cui esiste un vettore $\vec{\omega}^{(j)} \neq \vec{0}$ che soddisfa $A\vec{\omega}^{(j)} = \lambda_j \vec{\omega}^{(j)}$ sono numeri reali, e i vettori (reali) $\vec{\omega}^{(j)}$ verificano le relazioni di ortonormalità $\vec{\omega}^{(j)} \cdot \vec{\omega}^{(i)} = 0$ per $i \neq j$ e $\vec{\omega}^{(j)} \cdot \vec{\omega}^{(j)} = 1$.

- **Proposizione 1.** Sia A una matrice (reale) simmetrica. Siano $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$ l'autovalore minimo e l'autovalore massimo di A e sia $\Phi(\vec{v}) = A\vec{v} \cdot \vec{v}$ la forma quadratica associata ad A. Allora

  $$\lambda_{\min} |\vec{v}|^2 \leq \Phi(\vec{v}) \leq \lambda_{\max} |\vec{v}|^2 \qquad \forall\, \vec{v} \in \mathbf{R}^d\,.$$

  Dimostrazione. Prendiamo la base ortonormale di autovettori $\vec{\omega}^{(j)}$, e sviluppiamo il vettore $\vec{v}$ rispetto a questa base, cioè scriviamo $\vec{v} = \sum_j \alpha_j \vec{\omega}^{(j)}$. Allora

  $$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\sum_j \alpha_j \vec{\omega}^{(j)}) \cdot (\sum_i \alpha_i \vec{\omega}^{(i)}) = \sum_{i,j} \alpha_j \alpha_i \, \vec{\omega}^{(j)} \cdot \vec{\omega}^{(i)} = \sum_j \alpha_j^2\,,$$

  e

  $$\Phi(\vec{v}) = A\vec{v} \cdot \vec{v} = (\sum_j \alpha_j A\vec{\omega}^{(j)}) \cdot (\sum_i \alpha_i \vec{\omega}^{(i)}) = \sum_{i,j} \alpha_j \alpha_i \, \lambda_j \vec{\omega}^{(j)} \cdot \vec{\omega}^{(i)} = \sum_j \alpha_j^2 \lambda_j\,,$$

  per cui $\Phi(\vec{v}) \geq \lambda_{\min} \sum_j \alpha_j^2 = \lambda_{\min} |\vec{v}|^2$ e analogamente $\Phi(\vec{v}) \leq \lambda_{\max} |\vec{v}|^2$.

- **Proposizione 2.** Sia A una matrice (reale) simmetrica. Se tutti gli autovalori di A sono strettamente positivi allora la forma quadratica $\Phi(\vec{v})$ soddisfa $\Phi(\vec{v}) > 0$ per $\vec{v} \neq \vec{0}$, e, viceversa, se la forma quadratica $\Phi(\vec{v})$ soddisfa $\Phi(\vec{v}) > 0$ per $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora tutti gli autovalori di A sono strettamente positivi.
  Se tutti gli autovalori di A sono strettamente negativi allora la forma quadratica $\Phi(\vec{v})$ soddisfa $\Phi(\vec{v}) < 0$ per $\vec{v} \neq \vec{0}$, e, viceversa, se la forma quadratica $\Phi(\vec{v})$ soddisfa $\Phi(\vec{v}) < 0$ per $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora tutti gli autovalori di A sono strettamente negativi.

  Dimostrazione. Consideriamo solo il caso positivo, poiché il caso negativo è del tutto analogo. Se tutti gli autovalori di A sono positivi, allora $\lambda_{\min} > 0$ e dunque dalla Proposizione 1 si ha $\Phi(\vec{v}) \geq \lambda_{\min} |\vec{v}|^2 > 0$ per $\vec{v} \neq \vec{0}$. Viceversa, se si ha $\Phi(\vec{v}) > 0$ per $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora consideriamo l'autovettore $\vec{\omega}_{\min}$ associato all'autovalore $\lambda_{\min}$, con $|\vec{\omega}_{\min}| = 1$. Si ottiene

  $$0 < \Phi(\vec{\omega}_{\min}) = A\vec{\omega}_{\min} \cdot \vec{\omega}_{\min} = \lambda_{\min} \vec{\omega}_{\min} \cdot \vec{\omega}_{\min} = \lambda_{\min} |\vec{\omega}_{\min}|^2 = \lambda_{\min}\,,$$

  e quindi da $\lambda_{\min} > 0$ segue che tutti gli autovalori sono strettamente positivi.

- **Definizione.** Una matrice (reale) A si dice *definita positiva* se soddisfa $A\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ per ogni $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \in \mathbf{R}^d$; si dice *definita negativa* se soddisfa $A\vec{v} \cdot \vec{v} < 0$ per ogni $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \in \mathbf{R}^d$.

- **Proposizione 3.** Se la matrice A è definita positiva (oppure definita negativa), allora è non-singolare.

  Dimostrazione. Consideriamo un autovalore $\lambda_\star \in \mathbf{C}$ ed il corrispondente autovettore $\vec{\omega}_\star \in \mathbf{C}^d$. In particolare, possiamo scrivere $\vec{\omega}_\star = \vec{v}_\star + i\vec{w}_\star$, con $\vec{v}_\star, \vec{w}_\star \in \mathbf{R}^d$. Si ha (denotando con $\overline{z}$ il coniugato di un numero complesso z)

  $$A\vec{\omega}_\star \cdot \overline{\vec{\omega}_\star} = A\vec{v}_\star \cdot \vec{v}_\star + A\vec{w}_\star \cdot \vec{w}_\star + i(A\vec{w}_\star \cdot \vec{v}_\star - A\vec{v}_\star \cdot \vec{w}_\star)\,,$$

  quindi

  $$\mathcal{R}e(A\vec{\omega}_\star \cdot \overline{\vec{\omega}_\star}) = A\vec{v}_\star \cdot \vec{v}_\star + A\vec{w}_\star \cdot \vec{w}_\star > 0\,.$$

  D'altra parte $A\vec{\omega}_\star \cdot \overline{\vec{\omega}_\star} = \lambda_\star \omega_\star \cdot \overline{\vec{\omega}_\star} = \lambda_\star |\omega_\star|^2$, quindi $0 < \mathcal{R}e(A\vec{\omega}_\star \cdot \overline{\vec{\omega}_\star}) = \mathcal{R}e(\lambda_\star |\omega_\star|^2) = (\mathcal{R}e\lambda_\star)|\omega_\star|^2$, e di conseguenza $\mathcal{R}e\lambda_\star > 0$.
  In conclusione, nessun autovalore può essere nullo, e il determinante di A risulta diverso da 0.
  La stessa conclusione si ha se A è definita negativa, perché allora $-A$ è definita positiva.

- **Nota.** Se la matrice A è simmetrica e definita positiva, il fatto che sia non-singolare ha una dimostrazione ancora più semplice, poiché dalla Proposizione 2 tutti i suoi autovalori sono strettamente positivi.