Formule di Frenet–Serret (e qualche conseguenza)

Il punto di partenza è una curva regolare $\boldsymbol{\alpha}(t)$ (dunque di classe C^1 e con $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq \mathbf{0}$). I versori tangente, normale e binormale sono definiti come

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} \quad , \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \text{ (quando } \mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}) \quad , \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\,.$$

Le formule di Frenet–Serret mettono in relazione le derivate prime di $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ con gli stessi $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Per prima cosa definiamo la curvatura $\kappa(t)$ e la torsione $\tau(t)$ come

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} \quad , \quad \tau(t) = -\frac{\mathbf{B}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}\,.$$

[La curvatura misura la variazione di $\mathbf{T}$, dunque quanto la curva si allontana da una retta; la torsione misura la variazione di $\mathbf{B}$, dunque quanto la curva si allontana dall'essere contenuta in un piano...]

Dalle definizioni si ha

$$\mathbf{T}'(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|\, \mathbf{N}(t) = \kappa(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\, \mathbf{N}(t)\,. \tag{1}$$

D'altro canto, essendo $\mathbf{N}(t)$ di lunghezza costante, si ha che $\mathbf{N}'$ è ortogonale a $\mathbf{N}$, dunque è contenuto nel piano generato da $\mathbf{T}$ e $\mathbf{B}$ e si può scrivere come

$$\mathbf{N}'(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + b(t)\mathbf{B}(t)\,, \tag{2}$$

ove $a(t) = \mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{T}(t)$ e $b(t) = \mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{B}(t)$.

Siccome $\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$ per ogni t, derivando si ha

$$0 = \mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) \quad \text{per cui} \quad a(t) = \mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = -\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{T}'(t)\,.$$

Dall'espressione di $\mathbf{T}'$ e di κ si ricava quindi

$$a(t) = -\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{N}(t)\, \|\mathbf{T}'(t)\| = -\kappa(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,.$$

Analogamente, siccome $\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{B}(t) = 0$ per ogni t, dall'espressione di τ si ha

$$b(t) = \mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{B}(t) = -\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{B}'(t) = \tau(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,.$$

Infine derivando si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \mathbf{T}'(t) \times \mathbf{N}(t) + \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}'(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}'(t) \\ &= \mathbf{T}(t) \times [a(t)\mathbf{T}(t) + b(t)\mathbf{B}(t)] = b(t)\mathbf{T}(t) \times \mathbf{B}(t) = -b(t)\mathbf{N}(t)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

poiché $\mathbf{T}'$ è parallelo a $\mathbf{N}$ (e $\mathbf{T}$ è parallelo a $\mathbf{T}$...) e $\mathbf{T} \times \mathbf{B} = -\mathbf{N}$.

[Da questo risultato si vede anche che $\mathbf{B}'$ è parallelo a $\mathbf{N}$, dunque dall'espressione di τ si ricava

$$|\tau| = \frac{\|\mathbf{B}'\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|}\,,$$

che mostra in modo più chiaro come τ misuri la variazione di $\mathbf{B}$.]

Mettendo tutto assieme, si conclude che valgono le equazioni di Frenet–Serret

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \kappa(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\, \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{N}'(t) &= -\kappa(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \mathbf{T}(t) + \tau(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{B}'(t) &= -\tau(t)\, \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \mathbf{N}(t)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Con scrittura matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \|\boldsymbol{\alpha}'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} .$$

Nel caso in cui la curva sia espressa rispetto all'ascissa curvilinea s, che dà $\|\boldsymbol{\alpha}'\| = 1$, la formula finale diventa ancora più "elegante":

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} .$$

In conseguenza di noti teoremi sulle equazioni differenziali, questo risultato dice in particolare che, se di una curva si conoscono punto per punto la curvatura e la torsione, allora la curva è univocamente determinata a meno di rototraslazioni.

Usando le formule di Frenet–Serret, si possono ricavare delle formule che rendono più semplice il calcolo di κ e τ.

- Calcolo di κ.
  Siccome $\boldsymbol{\alpha}' = \|\boldsymbol{\alpha}'\|\,\mathbf{T}$, ne segue

$$\boldsymbol{\alpha}'' = (\|\boldsymbol{\alpha}'\|)'\,\mathbf{T} + \|\boldsymbol{\alpha}'\|\,\mathbf{T}' = (\|\boldsymbol{\alpha}'\|)'\,\mathbf{T} + \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2\,\mathbf{N}\,,$$

avendo usato le equazioni di Frenet–Serret per esprimere $\mathbf{T}'$. Dunque, essendo $\boldsymbol{\alpha}'$ parallelo a $\mathbf{T}$,

$$\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\alpha}' \times [(\|\boldsymbol{\alpha}'\|)'\,\mathbf{T} + \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2\,\mathbf{N}] = \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2\,\boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{N} = \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{B}\,,$$

da cui si conclude

$$\kappa = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3} .$$

[Si ottiene anche un modo per esprimere $\mathbf{B}$ senza dover calcolare $\mathbf{T}$ ed $\mathbf{N}$. Infatti, l'equazione precedente mostra che $\mathbf{B}$ è parallelo a $\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''$ (e con lo stesso verso), dunque, essendo un versore, si ha

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|} .]$$

- Calcolo di τ.
  Siccome $\boldsymbol{\alpha}'' = (\|\boldsymbol{\alpha}'\|)'\,\mathbf{T} + \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2\,\mathbf{N}$, derivando si ottiene un termine parallelo a $\mathbf{T}$, un termine parallelo a $\mathbf{T}'$ (dunque a $\mathbf{N}$), un termine parallelo a $\mathbf{N}$ ed infine un termine contenente $\mathbf{N}'$, cioè

$$\boldsymbol{\alpha}''' = \lambda\,\mathbf{T} + \mu\mathbf{N} + \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2\,\mathbf{N}'$$

per opportune funzioni scalari λ e μ. Utilizzando l'espressione di $\mathbf{N}'$ tratta dalle equazioni di Frenet–Serret si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}''' &= \lambda\,\mathbf{T} + \mu\mathbf{N} - \kappa^2\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{T} + \kappa\,\tau\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{B} \\ &= (\lambda - \kappa^2\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3)\,\mathbf{T} + \mu\mathbf{N} + \kappa\,\tau\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{B}\,. \end{aligned}$$

Essendo $\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' = \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{B}$, si conclude che

$$(\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'') \cdot \boldsymbol{\alpha}''' = \kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{B} \cdot \kappa\,\tau\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3\,\mathbf{B} = \tau\,\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|^2\,,$$

poiché $\kappa\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3 = \|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|$. Si è quindi ottenuto

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'') \cdot \boldsymbol{\alpha}'''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|^2} .$$