Syllabus di equazioni differenziali a derivate parziali

Equazioni

Le tre famiglie più note di equazioni differenziali a derivate parziali sono le equazioni ellittiche, le equazioni paraboliche e le equazioni iperboliche.

- **Equazioni ellittiche**
  - ⋆ Prototipo:
    operatore di Laplace $-\Delta$ ($= -\mathrm{div}\,\mathbf{grad}$) ed equazione di Poisson $-\Delta u = f$, con f funzione di $\mathbf{x}$.
  - ⋆ Un caso un po' più generale ("materiale" non omogeneo):
    equazione $-\,\mathrm{div}\,(k\,\mathbf{grad}\,u) = f$, dove $k(\mathbf{x})$ è una funzione che soddisfa alla condizione $k(\mathbf{x}) \geq \kappa_0 > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \overline{D}$.
  - ⋆ Il caso più generale ("materiale" non omogeneo e non isotropo):
    equazione $-\,\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u) = f$, dove $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ è una matrice che soddisfa alla condizione

$$\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(\mathbf{x}) v_j v_i \geq \kappa_0 |\mathbf{v}|^2 \quad , \quad \kappa_0 > 0\,, \tag{1}$$

    per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ e per ogni $\mathbf{x} \in \overline{D}$ (cioè $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ è definita positiva, uniformemente rispetto a $\mathbf{x} \in \overline{D}$).
    [Con $\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)$ si intende la divergenza del vettore $\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u$ ottenuto eseguendo il prodotto righe per colonne fra la matrice $\mathbf{K}$ e il vettore $\mathbf{grad}\,u$: scritto esplicitamente,

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) .]$$

Si vede immediatamente che se $\mathbf{K} = k\,\mathbf{I}$, dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità, allora il caso più generale diventa il caso intermedio; se $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ allora il caso più generale diventa l'operatore di Laplace.

- **Equazioni paraboliche**
  - ⋆ Prototipo:
    equazione del calore $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$, con f funzione di t e $\mathbf{x}$.
  - ⋆ Un caso un po' più generale ("materiale" con diffusività non costante):
    equazione $\frac{\partial u}{\partial t} -\, \mathrm{div}\,(k\,\mathbf{grad}\,u) = f$, dove $k(\mathbf{x}) \geq \kappa_0 > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \overline{D}$.
  - ⋆ Il caso più generale ("materiale" con diffusività non costante e non isotropo):
    equazione $\frac{\partial u}{\partial t} -\, \mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)$, dove $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ è una matrice definita positiva, uniformemente rispetto a $\mathbf{x} \in \overline{D}$.

  In sintesi: un'equazione è parabolica se è della forma $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$, dove L è un operatore ellittico.

- **Equazioni iperboliche**
  - ⋆ Prototipo:
    equazione delle onde $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$, con f funzione di t e $\mathbf{x}$.
  - ⋆ Un caso un po' più generale ("materiale" non omogeneo, con velocità di propagazione non costante):
    equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} -\, \mathrm{div}\,(k\,\mathbf{grad}\,u) = f$, dove $k(\mathbf{x}) \geq \kappa_0 > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \overline{D}$.
  - ⋆ Il caso più generale ("materiale" non omogeneo e non isotropo):
    equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)$, dove $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ è una matrice definita positiva, uniformemente rispetto a $\mathbf{x} \in \overline{D}$.

  In sintesi: un'equazione è iperbolica se è della forma $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f$, dove L è un operatore ellittico.

[Il nome deriva dalla classificazione delle coniche nel piano. Le coniche sono luogo di zeri di un polinomio di secondo grado. Se indichiamo il generico polinomio con $p(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D$, se $AC - B^2 > 0$ allora il luogo di zeri di p è un ellisse, se $AC - B^2 < 0$ allora il luogo di zeri di p è un iperbole, se $AC - B^2 = 0$ allora il luogo di zeri di p è una parabola. In modo analogo, se si considera un'equazione del secondo ordine in due variabili della forma $A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, si ha che: l'operatore ellittico di Laplace corrisponde a $A = -1$, $C = -1$ e $B = 0$, cioè a un caso con $AC - B^2 > 0$; l'operatore iperbolico delle onde corrisponde a $A = -1$, $C = 1$ e $B = 0$, cioè a un caso con $AC - B^2 < 0$; l'operatore parabolico del calore corrisponde a $A = -1$, $C = 0$ e $B = 0$, cioè a un caso con $AC - B^2 = 0$.]

Condizioni al bordo

I tre tipi più noti di condizioni al bordo sono quella di Dirichlet, quella di Neumann e quella di Robin (o di terzo tipo).

- **Condizione di Dirichlet**
  - ⋆ È la condizione per cui si assegna il valore dell'incognita u sul bordo: $u = \varphi$ su ∂D.

- **Condizione di Neumann**
  - ⋆ per l'operatore di Laplace: è la condizione per cui si assegna il valore della derivata normale dell'incognita u sul bordo, cioè $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ su ∂D (dove con $\frac{\partial u}{\partial n}$ si intende appunto la derivata direzionale nella direzione del versore normale esterno $\mathbf{n}$, cioè $\mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{n}$);
  - ⋆ per l'operatore $-\operatorname{div}(k\,\mathbf{grad}\,)$: $k\frac{\partial u}{\partial n} = g$ su ∂D (che ovviamente equivale a $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{g}{k}$ su ∂D, per cui è la stesso tipo di condizione dell'operatore di Laplace);
  - ⋆ per l'operatore $-\operatorname{div}(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,)$: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = g$ su ∂D.

- **Condizione di Robin (o di terzo tipo)**
  - ⋆ per l'operatore di Laplace: è la condizione per cui si assegna sul bordo una combinazione lineare dell'incognita u e della sua derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n}$, cioè $\frac{\partial u}{\partial n} + pu = q$ su ∂D (dove $p(\mathbf{x})$ soddisfa alla condizione $p(\mathbf{x}) \geq p_0 > 0$ per $\mathbf{x} \in \partial D$);
    [Per motivare questo segno, si pensi alla legge fisica che afferma che al bordo la derivata normale della temperatura è proporzionale alla differenza di temperatura fra interno ed esterno; per stabilire se è proporzionale con lo stesso segno o con segno opposto, si osservi che la derivata normale è positiva se il gradiente ha lo stesso verso della normale esterna, dunque se la temperatura esterna è superiore a quella interna. Quindi deve essere $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = p\,(\vartheta_{\text{est}} - \vartheta)$ con $p > 0$.]
  - ⋆ per l'operatore $-\operatorname{div}(k\,\mathbf{grad}\,)$: $k\frac{\partial u}{\partial n} + pu = g$ su ∂D (che ovviamente equivale a $\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{p}{k}u = \frac{g}{k}$ su ∂D, per cui è la stesso tipo di condizione dell'operatore di Laplace);
  - ⋆ per l'operatore $-\operatorname{div}(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,)$: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + pu = g$ su ∂D.

Condizioni iniziali

Per i problemi ellittici, che non dipendono dal tempo, e quindi non sono di tipo evolutivo, non occorrono condizioni iniziali.

Per i problemi parabolici, che sono del primo ordine in tempo, occorre un dato iniziale, che è $u_{|t=t_0} = u_0$, dove $u_0(\mathbf{x})$ è una funzione nota definita in D.

Per i problemi iperbolici, che sono del secondo ordine in tempo, occorrono due dati iniziali, che sono $u_{|t=t_0} = u_0$ e $\frac{\partial u}{\partial t}_{|t=t_0} = u_1$, dove $u_0(\mathbf{x})$ e $u_1(\mathbf{x})$ sono due funzioni note definite in D.

Unicità della soluzione di un problema ellittico

Un problema ellittico è ben posto, cioè ha soluzione e tale soluzione è unica. Dimostrare che la soluzione esiste è un problema abbastanza complesso; qui ci limiteremo a dimostrare l'unicità della soluzione.

Supponiamo di avere due soluzioni del problema ellittico

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u) = f & \text{in } D \\ Bu = b & \text{su } \partial D\,, \end{cases}$$

dove con Bu indichiamo una qualunque delle tre condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann o Robin. Chiamiamo u_1 e u_2 queste due soluzioni: vogliamo fare vedere che sono uguali, cioè che $u_1 - u_2 = 0$.

Se sottraiamo l'equazione che soddisfa u_2 da quella che soddisfa u_1 otteniamo:

$$-\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u_1) + \mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u_2) = f - f = 0 \quad \text{in } D\,.$$

Analogamente sul bordo otteniamo

$$Bu_1 - Bu_2 = b - b = 0 \quad \text{su } \partial D\,.$$

Siccome le derivate parziali sono operatori lineari, si ha

$$-\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u_1) + \mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u_2) = -\mathrm{div}\Big(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,(u_1 - u_2)\Big)\,.$$

Anche gli operatori di bordo B di Dirichlet, Neumann e Robin sono lineari, per cui $Bu_1 - Bu_2 = B(u_1 - u_2)$. In conclusione, per dimostrare l'unicità della soluzione (cioè $u_1 - u_2 = 0$) basta far vedere che la soluzione del problema ellittico con dati $f = 0$ e $b = 0$ è nulla.

Sia dunque u soluzione di

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u) = 0 & \text{in } D \\ Bu = 0 & \text{su } \partial D\,; \end{cases}$$

moltiplicando l'equazione per u e integrando in D si ottiene

$$0 = \iiint_D \Big(-\,\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)\Big)u\,dV\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\iiint_D \Big(-\,\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)\Big)u\,dV &= -\sum_{i,j=1}^{3}\iiint_D \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)u\,dV \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\iiint_D K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dV - \sum_{i,j=1}^{3}\iint_{\partial D} n_i\,K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,u\,dS \end{aligned} \tag{2}$$

(si ricordi la formula $\iiint_D \frac{\partial w}{\partial x_i}\,dV = \iint_{\partial D} n_i\,w\,dS$, poi applicata a una funzione prodotto $w = FG$...).

Dalla condizione di ellitticità (1) e dalla monotonia dell'integrale il primo addendo in (2) soddisfa

$$\sum_{i,j=1}^{3}\iiint_D K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dV \geq \kappa_0 \iiint_D |\mathbf{grad}\,u|^2\,dV\,. \tag{3}$$

Dalle condizioni al bordo il secondo addendo si annulla per la condizione di Dirichlet $u = 0$ su ∂D, così come per la condizione di Neumann $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ su ∂D. Se invece si sta considerando la condizione di Robin $\sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + pu = 0$ su ∂D, il secondo addendo in (2) diventa

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\iint_{\partial D} n_i\,K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,u\,dS = \iint_{\partial D} p\,u^2\,dS \geq p_0 \iint_{\partial D} u^2\,dS\,. \tag{4}$$

Inserendo (3) e (4) in (2) si è quindi ottenuto

$$0 \geq \kappa_0 \iiint_D |\mathbf{grad}\, u|^2 \, dV + \chi_R \, p_0 \iint_{\partial D} u^2 \, dS \,,$$

ove $\chi_R = 0$ per i problemi di Dirichlet e di Neumann, mentre $\chi_R = 1$ per il problema di Robin.

Nel caso del problema di Dirichlet si è dunque giunti a $\iiint_D |\mathbf{grad}\, u|^2 \, dV = 0$, dunque a $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{0}$ in D, che implica $u = \text{cost}$ in D; ma essendo $u = 0$ su ∂D si conclude $u = 0$ in D.

Nel caso del problema di Neumann da $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{0}$ in D si deduce $u = \text{cost}$ in D, ma niente di più (e in effetti, se u è la soluzione del problema di Neumann, $u + \text{cost}$ è ancora soluzione!). La conclusione è quindi che due soluzioni del problema di Neumann possono essere diverse, ma la loro differenza è una costante.

Nel caso del problema di Robin si deduce che $\iiint_D |\mathbf{grad}\, u|^2 \, dV = 0$ e $\iint_{\partial D} u^2 \, dS = 0$, per cui $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{0}$ in D e $u = 0$ su ∂D; si può quindi concludere che $u = 0$ in D come per il problema di Dirichlet.

Unicità della soluzione di un problema parabolico

Come nel caso ellittico, ci si può ridurre a dimostrare che l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{K}\, \mathbf{grad}\, u) = 0 & \text{in } (t_0, t_0 + T) \times D \\ Bu = 0 & \text{su } (t_0, t_0 + T) \times \partial D \\ u_{|t=t_0} = 0 & \text{in } D \end{cases}$$

è la soluzione $u = 0$ (al solito, si è indicata con Bu una qualunque delle tre condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann o Robin).

Moltiplichiamo l'equazione per u e integriamo in D: otteniamo

$$0 = \iiint_D \frac{\partial u}{\partial t} u \, dV - \iiint_D \Big(\operatorname{div}(\mathbf{K}\, \mathbf{grad}\, u)\Big) u \, dV \,. \tag{5}$$

Il primo addendo in (5) si può riscrivere come

$$\iiint_D \frac{\partial u}{\partial t} u \, dV = \iiint_D \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} \, dV = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_D u^2 \, dV \,. \tag{6}$$

Come nel caso ellittico, il secondo addendo in (5) si può rielaborare fino ad ottenere

$$- \iiint_D \Big(\operatorname{div}(\mathbf{K}\, \mathbf{grad}\, u)\Big) u \, dV \geq \kappa_0 \iiint_D |\mathbf{grad}\, u|^2 \, dV + \chi_R \, p_0 \iint_{\partial D} u^2 \, dS \,. \tag{7}$$

Utilizzando (6) e (7) in (5) si ha

$$0 \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_D u^2 \, dV + \kappa_0 \iiint_D |\mathbf{grad}\, u|^2 \, dV + \chi_R \, p_0 \iint_{\partial D} u^2 \, dS \,.$$

Integrando ora in tempo da t_0 a $t_0 + \tau$, per un generico $\tau \in (0, T)$, e ricordando che $u_{|t=t_0} = 0$, troviamo

$$0 \geq \frac{1}{2} \iiint_D u^2_{|t=t_0+\tau} \, dV + \kappa_0 \int_{t_0}^{t_0+\tau} \iiint_D |\mathbf{grad}\, u|^2 \, dV + \chi_R \, p_0 \int_{t_0}^{t_0+\tau} \iint_{\partial D} u^2 \, dS \,.$$

Da questo segue che tutti i tre addendi, che sono non negativi, devono essere nulli. Dall'annullarsi del primo segue subito che $u^2_{|t=t_0+\tau} = 0$ in D, cioè $u = 0$ in $(t_0, t_0 + T) \times D$, per l'arbitrarietà di τ.

[Si noti che, per i problemi parabolici, si ottiene unicità anche per il problema di Neumann.]

Unicità della soluzione di un problema iperbolico

In questo caso supponiamo che la matrice $\mathbf{K}$ sia simmetrica, cioè $K_{ij} = K_{ji}$ per ogni $i, j = 1, 2, 3$. Come nei casi ellittico e parabolico, ci si può ridurre a dimostrare che l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u) = 0 & \text{in } (t_0, t_0+T) \times D \\ Bu = 0 & \text{su } (t_0, t_0+T) \times \partial D \\ u_{|t=t_0} = 0 & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial t}_{|t=t_0} = 0 & \text{in } D \end{cases}$$

è la soluzione $u = 0$ (al solito, si è indicata con Bu una qualunque delle tre condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann o Robin).

Questa volta moltiplichiamo l'equazione per $\frac{\partial u}{\partial t}$ e integriamo in D: otteniamo

$$0 = \iiint_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dV - \iiint_D \Big(\operatorname{div}(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)\Big) \frac{\partial u}{\partial t}\, dV \,. \tag{8}$$

Il primo addendo in (8) si può riscrivere come

$$\iiint_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = \iiint_D \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dV = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dV \,. \tag{9}$$

Il secondo addendo in (8) , sostanzialmente come nel caso ellittico, si può integrare per parti ottenendo

$$\begin{aligned} &- \iiint_D \Big(\operatorname{div}(\mathbf{K}\,\mathbf{grad}\,u)\Big) \frac{\partial u}{\partial t}\, dV \\ &\quad = \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dV - \sum_{i,j=1}^{3} \iint_{\partial D} n_i\, K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t}\, dS \,. \end{aligned} \tag{10}$$

L'integrale sul bordo in (10) è nullo nel caso di Dirichlet (perché da $u = 0$ su $(t_0, t_0+T) \times \partial D$ segue, derivando in tempo, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ su $(t_0, t_0+T) \times \partial D$), ed è nullo nel caso di Neumann, poiché $\sum_{i,j=1}^{3} n_i\, K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ su ∂D. Nel caso di Robin invece vale

$$- \sum_{i,j=1}^{3} \iint_{\partial D} n_i\, K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t}\, dS = \iint_{\partial D} p\, u \frac{\partial u}{\partial t}\, dS = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\partial D} p\, u^2\, dS \,. \tag{11}$$

Utilizzando dapprima l'ipotesi che la matrice $\mathbf{K}$ è simmetrica, e poi scambiando gli indici "muti" i e j, si vede che in (10) l'integrale in D vale

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dV = \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dV \\ &\quad = \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dV = \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dV \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Dunque

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dV\right) \\ &\quad = \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dV + \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dV \\ &\quad = 2 \sum_{i,j=1}^{3} \iiint_D K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dV \,, \end{aligned} \tag{13}$$

dove l'ultima equaglianza deriva da (12).

Inserendo in (8) le relazioni (9), (11) e (13) si giunge a

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dV + \chi_R \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iint_{\partial D} p\, u^2\, dS + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\iiint_D K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dV\right) ,$$

dove al solito $\chi_R = 0$ per i problemi di Dirichlet e di Neumann, e $\chi_R = 1$ per il problema di Robin.

Integrando ora in tempo da t_0 a $t_0+\tau$, per un generico $\tau \in (0,T)$, e ricordando che $u_{|t=t_0} = 0$ (e quindi $\mathbf{grad}\, u_{|t=t_0} = \mathbf{0}$) e $\frac{\partial u}{\partial t}_{|t=t_0} = 0$, troviamo

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{|t=t_0+\tau} dV + \chi_R \frac{1}{2}\iint_{\partial D} p\, u^2_{|t=t_0+\tau}\, dS + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\iiint_D K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}_{|t=t_0+\tau}\frac{\partial u}{\partial x_i}_{|t=t_0+\tau}\, dV\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{|t=t_0+\tau} dV + \chi_R\, p_0 \frac{1}{2}\iint_{\partial D} u^2_{|t=t_0+\tau}\, dS + \frac{1}{2}\,\kappa_0 \iiint_D |\mathbf{grad}\, u_{|t=t_0+\tau}|^2\, dV ,
\end{aligned}$$

avendo usato l'ipotesi di ellitticità (1) e la condizione $p(\mathbf{x}) \geq p_0 > 0$. Quindi tutti e tre gli addendi, che sono non negativi, sono nulli. Focalizzando sul primo si vede che $\frac{\partial u}{\partial t}$ si annulla in D ad ogni generico istante $t_0+\tau$, con $\tau \in (0,T)$, per cui u non cambia al cambiare di t. Siccome $u_{|t=t_0} = 0$, per l'arbitrarietà di τ si conclude che $u = 0$ in $(t_0, t_0+T) \times D$.

[Si noti che, per i problemi iperbolici, si ottiene unicità anche per il problema di Neumann.]

Esistenza della soluzione per il problema del calore nel caso unidimensionale

Consideriamo il problema del calore quando la variabile spaziale x sta nell'intervallo $[0,\pi]$ e la variabile temporale t sta in $[0,T]$, con condizioni di Dirichlet omogenee e con una sorgente di calore nulla. Questo significa che cerchiamo la soluzione del problema

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } (0,T)\times(0,\pi) \\
u_{|x=0} = 0\ ,\ u_{|x=\pi} = 0 & \text{in } (0,T) \\
u_{|t=0} = u_0 & \text{in } (0,\pi)\,,
\end{cases}$$

con $u_0 \neq 0$. Una possibile strategia è di ricercare una soluzione a variabili separabili:

$$u(t,x) = T(t)X(x)\,.$$

Inserendo nell'equazione si arriva a

$$T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0\,.$$

Dividendo per $T(t)X(x)$ questo dà

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Siccome a sinistra sta una funzione della sola variabile t, mentre a destra sta una funzione della sola variabile x, questa uguaglianza è possibile solo se ambedue i rapporti sono uguali a una stessa costante, diciamo, λ. Si è quindi giunti a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \text{ per ogni } x \in [0,\pi]\ \ ,\ \ \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \text{ per ogni } t \in [0,T]\,.$$

La funzione $X(x)$ deve quindi soddisfare all'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti $X''(x) = \lambda X(x)$ per $x \in [0,\pi]$, unitamente alle condizioni al contorno $X(0) = 0$ e $X(\pi) = 0$.

Proviamo a risolvere questo problema al contorno. (Attenzione: non è un problema di Cauchy, per il quale saremmo sicuri di avere un'unica soluzione! Qui non abbiamo certezza che la soluzione ci sia.) Ci sono tre casi da esaminare, a seconda che λ sia strettamente positivo, nullo, o strettamente negativo.

Se $\lambda > 0$ la soluzione dell'equazione omogenea è della forma

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \,.$$

Imponendo $X(0) = 0 = X(\pi)$ si ottiene $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$; questo sistema ha la sola soluzione $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, quindi viene $X(x) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$. Questo fornirebbe la soluzione $u = 0$, incompatibile con il dato iniziale $u_0 \neq 0$.

Se $\lambda = 0$ la soluzione dell'equazione omogenea è della forma

$$X(x) = c_1 + c_2 x \,,$$

e imponendo le condizioni $X(0) = 0 = X(\pi)$ si trova nuovamente $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $u = 0$.

Se $\lambda < 0$ la soluzione dell'equazione omogenea è della forma

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x) \,;$$

imponendo la condizione $X(0) = 0$ viene $c_2 = 0$, mentre imponendo la condizione $X(\pi) = 0$ viene $c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$. Siccome non possiamo accettare la soluzione $c_1 = 0$ (che darebbe di nuovo $u = 0$...), bisogna che sia

$$\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \,,$$

il che è possibile se

$$\sqrt{-\lambda}\pi = k\pi \quad , \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \,,$$

cioè $\lambda_k = -k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$ Questo dà $X_k(x) = c_1 \sin(kx)$, per qualsiasi costante $c_1 \in \mathbf{R}$.

Per quanto riguarda la funzione $T(t)$, essa deve soddisfare $T'(t) = \lambda_k T(t) = -k^2 T(t)$, per cui è data da $T_k(t) = c_3 e^{-k^2 t}$.

La scelta di un singolo valore k non dà la risposta cercata, poichè verrebbe $u_k(t,x) = c_3 c_1 e^{-k^2 t} \sin(kx)$, e per $t = 0$ si otterrebbe un multiplo di $\sin(kx)$, e non il dato iniziale u_0. Ma utilizzando la serie di tutte le possibili soluzioni u_k si ha

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad , \quad d_k \in \mathbf{R} \,,$$

ed imporre la condizione iniziale corrisponde a trovare le costanti d_k in modo che

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx) \,.$$

Dunque basta sviluppare $u_0(x)$ in una serie di Fourier di soli seni! Si ha

$$d_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx) \, dx \,,$$

avendo prolungato in modo dispari $u_0(x)$ in $[-\pi, 0]$, considerandola poi come periodica di periodo 2π.

[Si noti che la somma di funzioni a variabili separabili, fossero anche solo due, non è una funzione a variabili separabili: basta considerare ad esempio $f_1(t,x) = tx$ e $f_2(t,x) = t^2 x^2$, per cui $f_1(t,x) + f_2(t,x) = tx(1 + tx)$. Dunque la soluzione u trovata non è a variabili separabili, che era l'ipotesi da cui partiva il tentativo di risoluzione. Però un'idea non conclusiva ha permesso di individuare una variante che ha portato al risultato!]

Questo metodo è abbastanza generale: può essere ripetuto per l'equazione delle onde in $(0, T) \times (0, \pi)$ (cambia solo la parte relativa alla funzione $T(t)$...); può essere ripetuto per un intervallo spaziale generico (l, L) (basta cambiare variabile con $w = \frac{\pi}{L-l}(x - l)$...); può essere adattato ad equazioni paraboliche o iperboliche a coefficienti costanti (cioè con $k(x) = \kappa_0$); può essere esteso a più variabili spaziali, purché la geometria rimanga quella del prodotto di intervalli (rettangoli, parallelepipedi ad angoli retti).

Di più: l'elemento di base che ha permesso di utilizzarlo sta nell'avere trovato un "buon" sistema di funzioni per lo sviluppo in serie (nel caso in questione, le funzioni $\sin(kx)$). Supponiamo che per un certo operatore differenziale ellittico L riuscissimo a trovare un sistema di funzioni $\omega_k(\mathbf{x})$ non nulle (e una successione di costanti $\mu_k \neq 0$) che soddisfano per $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{cases} L\omega_k = \mu_k \omega_k & \text{in } D \\ B\omega_k = 0 & \text{su } \partial D \,, \end{cases}$$

dove B indica una delle tre condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann o Robin, e inoltre, e qui sta il punto veramente importante,

$$\iiint_D \omega_k \, \omega_m \, dV = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \\ 1 & \text{se } k = m \end{cases} \quad . \tag{14}$$

Allora potremmo pensare di risolvere il problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } D \\ Bu = 0 & \text{su } \partial D \end{cases}$$

ponendo

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \omega_k(\mathbf{x}) \,.$$

Per soddisfare (formalmente...) l'equazione $Lu = f$ basta imporre che

$$Lu(\mathbf{x}) = L\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \omega_k(\mathbf{x})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k (L\omega_k)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \mu_k \omega_k(\mathbf{x}) = f \,,$$

dunque basta sviluppare f in serie come $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \omega_k(\mathbf{x})$ ed eguagliare i coefficienti, cioè scrivere

$$u_k = \frac{f_k}{\mu_k} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots \,.$$

Dalla proprietà (14) segue anche subito che $f_k = \iiint_D f \, \omega_k \, dV$. Infatti, da $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \omega_k(\mathbf{x})$ si ha

$$\iiint_D f \, \omega_m \, dV = \iiint_D \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \omega_k\right) \omega_m \, dV = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \iiint_D \omega_k \, \omega_m \, dV = f_m \,.$$

Per finire, notiamo che nell'intervallo $(0, \pi)$ per l'operatore ellittico $-\frac{d^2}{dx^2}$ con condizioni al contorno di Dirichlet il sistema $\omega_k(x)$ è proprio quello che avevamo già determinato (a meno di una costante moltiplicativa): $\omega_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$, con $\mu_k = k^2$.