Il volume della piramide di Cheope

Vogliamo calcolare il volume della piramide a base quadrata e con vertice sull'asse verticale passante per il centro del quadrato.

Sia $l > 0$ la misura di metà del lato del quadrato ed H l'altezza della piramide; il quadrato di base ha dunque vertici (l, l), $(-l, l)$, $(-l, -l)$, $(l, -l)$.

Spezziamo la base in quattro quadrati uguali, e sia

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le l, 0 \le y \le l\}$$

uno dei quattro pezzi della base. Spezziamo ancora K in due triangoli uguali, e sia

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le l, 0 \le y \le x\}$$

uno dei due triangoli (che possiamo vedere come un insieme y-semplice).

Il "tetto" sopra il "pavimento" dato da T è un piano, e il volume dell'insieme compreso fra questo "tetto" e il "pavimento" è $\frac{1}{8}$ del volume della piramide (ci sono 8 triangoli come T nella base della piramide, e sopra ad ognuno di essi il "tetto" è un piano passante per il vertice della piramide e per il lato del quadrato).

Il piano sopra di T è il piano passante da $(l, 0, 0)$, $(l, l, 0)$ e $(0, 0, H)$, dunque il piano di equazione

$$\frac{H}{l}x + z - H = 0\,, \text{ cioè } z = H - \frac{H}{l}x\,.$$

Allora il volume del pezzo di piramide di base T si calcola integrando per fili su T, dove ogni filo va dalla quota $z = 0$ alla quota $z = H - \frac{H}{l}x$, ed è dato da

$$\begin{aligned}\iint_T \big(H - \frac{H}{l}x\big)dxdy &= \int_0^l \Big(\int_0^x \big(H - \frac{H}{l}x\big)dy\Big)dx = \int_0^l \big(H - \frac{H}{l}x\big)\, x\, dx \\ &= \int_0^l \big(Hx - \frac{H}{l}x^2\big)\, dx = H\frac{x^2}{2}\Big|_0^l - \frac{H}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = H\big(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{3}\big) = H\frac{l^2}{6}\,.\end{aligned}$$

Dunque il volume della piramide è

$$V_P = 8\,H\frac{l^2}{6} = 4l^2\frac{H}{3} = (\text{area di base}) \cdot \frac{H}{3}\,.$$

Se si fa l'integrale per strati si vede bene la dipendenza di tipo quadratico dell'area dello strato (a lezione l'abbiamo vista per un generico cono). Infatti la sezione $Q(z)$ della piramide a livello z è un quadrato; la misura del lato cala linearmente da $2l$, quando $z = 0$, a 0, quando $z = H$; dunque è data da $2l\big(1 - \frac{1}{H}z\big)$, per cui l'area della sezione è data da

$$\text{area}\, Q(z) = 4l^2\big(1 - \frac{1}{H}z\big)^2 = (\text{area di base})\,\big(1 - \frac{1}{H}z\big)^2\,.$$

Il volume calcolato per strati è dunque

$$\begin{aligned}V_P &= \int_0^H \Big(\iint_{Q(z)} 1\, dxdy\Big)\, dz = \int_0^H \text{area}\, Q(z)\, dz = (\text{area di base}) \cdot \int_0^H \big(1 - \frac{1}{H}z\big)^2\, dz \\ &= (\text{area di base}) \cdot \int_0^H \big(1 - 2\frac{1}{H}z + \frac{1}{H^2}z^2\big)\, dz = (\text{area di base}) \cdot \frac{H}{3}\,.\end{aligned}$$