Un po' di volumi

- Sia C il cilindro avente come asse l'asse z e come sezione nel piano xy il cerchio di centro 0 e raggio 1. Sia A la parte di C compresa fra il piano xy e il piano $z+y-1=0$. Si calcoli il volume di A.

La sezione di C nel piano xy è il cerchio $x^2+y^2 \le 1$. Dunque l'ordinata y di un punto (x,y) che appartiene a questa sezione è minore o uguale a 1, per cui il valore $z = 1-y$ è maggiore o uguale a 0. Procedendo per fili, si ha che ogni filo parte da quota $z=0$ e arriva a quota $z=1-y$, e c'è un filo per ogni punto (x,y) del cerchio $x^2+y^2\le 1$. Quindi

$$\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} \Big(\int_0^{1-y} 1\,dz\Big)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} (1-y)\,dx\,dy$$

$$= [\text{coordinate polari}] \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 (1-\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\Big)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 \rho\,d\rho\Big)\,d\theta - \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\Big)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta - \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\sin\theta\,d\theta = \pi\,.$$

[Si poteva anche usare il fatto che la funzione y è dispari e il cerchio di centro 0 e raggio 1 è simmetrico rispetto all'asse x (cioè allo scambio di y con $-y$), per cui $\iint_{x^2+y^2\le 1} y\,dx\,dy = 0$ e quindi

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-y)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} 1\,dx\,dy = \text{area(cerchio)} = \pi\,.]$$

Se invece si cerca di calcolare l'integrale procedendo per strati, il primo passo è identificare l'intervallo in cui varia z e la forma di ogni strato. Siccome il piano è dato da $z=1-y$, e i valori minimo e massimo di y nel cerchio di centro 0 e raggio 1 sono rispettivamente -1 e 1, la massima quota z è 2, mentre la minima quota z è 0. Al variare di z fra 0 e 2 lo strato $Q(z)$ è un pezzo di cerchio di centro 0 e raggio 1, quello che nel piano xy sta a sinistra della retta $y = 1-z$ [si deve avere $z\le 1-y$, dunque $y \le 1-z$].

Lo strato $Q(z)$ può quindi essere descritto come

$$Q(z) = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid -1\le y\le 1-z\,,\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le -\sqrt{1-y^2}\}\,.$$

Quindi

$$\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\Big(\iint_{Q(z)} 1\,dx\,dy\Big)\,dz = \int_0^2\Big(\int_{-1}^{1-z}\Big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\Big)\,dy\Big)\,dz$$

$$= 2\int_0^2\Big(\int_{-1}^{1-z}\sqrt{1-y^2}\,dy\Big)\,dz\,.$$

Qui è conveniente vedere in altro modo l'insieme di integrazione nel piano yz: esso è il triangolo [fate un disegno!!!]

$$\begin{aligned} T &= \{(y,z)\in\mathbf{R}^2 \mid -1\le y\le 1-z\,,\ 0\le z\le 2\} \\ &= \{(y,z)\in\mathbf{R}^2 \mid -1\le y\le 1\,,\ 0\le z\le 1-y\}\,, \end{aligned}$$

per cui vedendolo come un insieme z-semplice (invece che come un insieme y-semplice) posso riscrivere l'ultimo integrale come

$$2\int_0^2\Big(\int_{-1}^{1-z}\sqrt{1-y^2}\,dy\Big)\,dz = 2\iint_T \sqrt{1-y^2}\,dy\,dz = 2\int_{-1}^1\Big(\int_0^{1-y}\sqrt{1-y^2}\,dz\Big)\,dy$$

$$= 2\int_{-1}^1 (1-y)\sqrt{1-y^2}\,dy = 2\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\,dy \quad [\text{poiché la funzione } y\sqrt{1-y^2} \text{ è dispari}]$$

$$= [\text{ponendo } y=\sin\varphi]\ 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi\,.$$

- Il volume della sala da concerto K progettata da “Renzo Piano”: il pavimento è piatto a quota $z = 0$, il soffitto è il grafico della funzione

$$f(x, y) = \frac{2 + \sin\big(100 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\big)}{1 + x^2 + y^2}$$

[un soffitto molto “mosso”, per migliorare l'acustica...], la pianta nel piano (x, y) è il semicerchio S di centro 0 e raggio 1 contenuto nel semipiano $x > 0$.

È il tipico edificio che si può considerare per fili: per ogni punto $(x, y) \in S$ c'è un filo che va dalla quota 0 alla quota $f(x, y)$ (si noti che $f(x, y) \geq 0$...). Dunque:

$$\iiint_K 1\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left(\int_0^{f(x,y)} 1\, dz \right) dx\, dy = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy\ .$$

In coordinate polari la funzione f si scrive come

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{2 + \sin\big(100 \operatorname{arctg} \operatorname{tg}\theta\big)}{1 + \rho^2} = \frac{2 + \sin\big(100\,\theta\big)}{1 + \rho^2}\ ,$$

mentre S è descritto da $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \rho \leq 1$. Quindi

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x, y)\, dx\, dy &= [\text{coordinate polari}] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^1 \frac{2 + \sin\big(100\,\theta\big)}{1 + \rho^2}\, \rho\, d\rho \Big)\, d\theta \\
&= \int_0^1 \frac{\rho}{1 + \rho^2}\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(2 + \sin\big(100\,\theta\big)\big)\, d\theta \\
&= \int_0^1 \frac{\rho}{1 + \rho^2}\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\, d\theta \quad [\text{poiché la funzione } \sin(100\,\theta) \text{ è dispari}] \\
&= 2\pi\, \frac{1}{2} \log(1 + \rho^2)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \pi \log 2\, .
\end{aligned}$$

Calcolare questo volume per strati è molto più complicato: siccome il soffitto è molto “mosso”, gli strati [quelli al di sopra della quota $z = \frac{1}{2}$...] sono difficili da identificare.

- Il volume del grattacielo G progettato da “Frank Gehry”: è il solido ottenuto ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione

$$g(z) = 2 + \sin(100\, z)$$

[un edificio con molti sbalzi, che può essere interessante dal punto di vista estetico...], con z compreso fra 0 e π.

Questo grattacielo è facile da descrivere guardando la sua pianta ad ogni quota: siccome è un solido di rotazione, la pianta è un cerchio $C(z)$, che a quota z ha raggio $g(z)$. Dunque

$$\begin{aligned}
\iiint_G 1\, dx\, dy\, dz &= \int_0^\pi \Big(\iint_{C(z)} 1\, dx\, dy \Big)\, dz = \int_0^\pi \operatorname{area}(C(z))\, dz \\
&= \int_0^\pi \pi\big(2 + \sin(100\, z)\big)^2\, dz = \pi \int_0^\pi \big(4 + 4\sin(100\, z) + \sin^2(100\, z)\big)\, dz \\
&= [\text{ponendo } t = 100z]\ 4\,\pi^2 + \frac{4}{100}\pi \int_0^{100\pi} \sin t\, dt + \frac{1}{100}\pi \int_0^{100\pi} \sin^2 t\, dt \\
&= 4\,\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 = \frac{9}{2}\pi^2\, .
\end{aligned}$$

Il calcolo di questo volume per fili è molto più complicato, perché il filo sopra ad ogni punto della proiezione del volume sul pavimento [che è il cerchio di centro 0 e raggio 3...] è difficile da identificare [quando $x^2+y^2 \geq 1$...].