La caduta di una massa nell'aria
(ovvero: quando i cancellini non restano sospesi in aria)

Consideriamo la caduta di una massa (puntiforme...) nell'aria, tenendo in conto la resistenza dell'aria, proporzionale alla velocità. Dalla legge di Newton $f = ma$, dove f è la forza e a l'accelerazione, abbiamo che la posizione $y(t)$ di una massa m all'istante t deve soddisfare l'equazione differenziale

$$my''(t) = mg - hy'(t)\,,$$

ove la costante $g > 0$ è l'accelerazione dovuta alla gravità (diretta verso il basso) e la costante $h > 0$ esprime la resistenza dell'aria; due parametri fisici il cui valore è noto. [y'' è l'accelerazione, y' è la velocità.]

Riscrivendo abbiamo

$$y''(t) + \frac{h}{m}y'(t) = g\,.$$

Il polinomio associato è $r^2 + \frac{h}{m}r$, che ha come radici $r = 0$ ed $r = -\frac{h}{m}$. Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è dato da

$$y_0(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{h}{m}t}\,.$$

Siccome il termine g a destra nell'equazione è una costante, cerchiamo una soluzione particolare della forma $y_\star(t) = At$ [provare con $y_\star(t) = A$ non può funzionare, perché le costanti sono soluzioni dell'omogenea...; la "cura" è moltiplicare per t]. Si ha $y'_\star(t) = A$ e $y''_\star(t) = 0$, per cui si cerca A in modo che sia $y''_\star(t) + \frac{h}{m}y'_\star(t) = 0 + \frac{h}{m}A = g$, cioè $A = \frac{mg}{h}$.

Dunque tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{mg}{h}t$$

[da cui $y'(t) = -c_2\frac{h}{m}e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{mg}{h}$].

Imponendo i dati di Cauchy (posizione iniziale nulla e velocità iniziale nulla; quindi $y(t)$ sarà lo spazio percorso nella caduta all'istante t) si ha

$$0 = y(0) = c_1 + c_2 \quad , \quad 0 = y'(0) = -c_2\frac{h}{m} + \frac{mg}{h}$$

quindi $c_2 = \frac{m^2 g}{h^2}$, $c_1 = -\frac{m^2 g}{h^2}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = \frac{m^2 g}{h^2}(e^{-\frac{h}{m}t} - 1) + \frac{mg}{h}t\,.$$

Di conseguenza la velocità vale $y'(t) = \frac{mg}{h}(1 - e^{-\frac{h}{m}t})$, da cui si vede che la velocità limite per $t \to +\infty$ è data da $v_\infty = \frac{mg}{h}$ (che ci debba essere una velocità limite è un'informazione fisicamente ben nota).

[Se, per finire in gloria come nell'ultima ora di lezione, dopo avere correttamente calcolato la costante $A = \frac{mg}{h}$, nell'andare ad inserire questo valore ci si dimentica che la soluzione particolare $y_\star$ è data da At e non da A, si trova la "soluzione"

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{mg}{h}\,;$$

imponendo allora i dati di Cauchy ne verrebbe $c_1 + c_2 + \frac{mg}{h} = 0$ e $c_2 = 0$, quindi $c_1 = -\frac{mg}{h}$, e la "soluzione" del problema di Cauchy sarebbe $y(t) = -\frac{mg}{h} + \frac{mg}{h} = 0$: il cancellino rimarrebbe sospeso in aria, fermo nella posizione in cui lo si è lasciato all'istante iniziale!]