**Potenziali scalari e potenziali vettori nello spazio tridimensionale**

- **Potenziali scalari.**

Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto limitato e connesso (cioè “fatto di un solo pezzo”), con frontiera $\partial D$ regolare a tratti. Vogliamo capire quando in $\overline{D} = D \cup \partial D$ è possibile esprimere un campo vettoriale $\mathbf{v}$ come gradiente di un potenziale scalare $\varphi$, cioè vogliamo capire quando si ha $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\varphi$ in $\overline{D}$ (in altri termini, quando un campo vettoriale è conservativo in $\overline{D}$). Si noti che in questo capitolo, quando parleremo di superficie, intenderemo sempre una superficie orientabile regolare a tratti.

Il primo risultato è questo:

**Teorema A.** *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *è conservativo in* $\overline{D}$ *se e solo se è uguale a 0 la sua circuitazione lungo* **qualsiasi** *curva chiusa contenuta in* $\overline{D}$.

**Dimostrazione.** Se $\mathbf{v}$ è conservativo e $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva chiusa si ha

$$\oint_\alpha \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_\alpha \mathbf{grad}\,\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0\,,$$

poiché è nulla la differenza di $\varphi$ fra il punto finale e il punto iniziale di $\boldsymbol{\alpha}$ (il punto finale coincide con il punto iniziale...).

Il viceversa si dimostra prendendo

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\alpha_\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

ove $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}$ è una qualunque curva che congiunge un punto fissato $\mathbf{x}_0$ con il punto generico $\mathbf{x}$. [Si noti che se l'integrale di $\mathbf{v}$ lungo qualunque curva chiusa è 0, allora l'integrale curvilineo di $\mathbf{v}$ non dipende dalle curva che congiunge due punti, ma solamente dai due punti stessi: dunque la formula qui sopra definisce una funzione della sola variabile $\mathbf{x}$, e non dipende dalla scelta della curva congiungente $\mathbf{x}_0$ ed $\mathbf{x}$.] Calcolando il rapporto incrementale rispetto alla variabile $x_i$ si ottiene :

$$\frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \varphi(\mathbf{x})}{h} = \frac{\int_{\alpha_{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\alpha_\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{h}\;;$$

siccome l'integrale curvilineo non dipende dalla traiettoria, si può scegliere $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i}$ come la curva ottenuta facendo seguire alla curva $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}$ (che va da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$) il segmento che congiunge $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$. Così si ottiene

$$\frac{\int_{\alpha_{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\alpha_\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{h} = \frac{\int_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{h}\,.$$

Il segmento $s$ ha come parametrizzazione $s(t) = \mathbf{x} + th\mathbf{e}_i$, con $s \in [0,1]$, e si ha $s'(t) = h\mathbf{e}_i$. In conclusione, utilizzando il teorema della media integrale, esiste $c \in (0,1)$ per cui

$$\frac{\int_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x} + th\mathbf{e}_i) \cdot h\mathbf{e}_i\,dt = \int_0^1 v_i(\mathbf{x} + th\mathbf{e}_i)\,dt = v_i(\mathbf{x} + ch\mathbf{e}_i)\,.$$

Passando al limite per $h \to 0$ si dimostra che $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = v_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$, quindi $\mathbf{grad}\,\varphi = \mathbf{v}$. △

Un secondo importante risultato è:

**Teorema B.** *Se un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *è conservativo in* $\overline{D}$*, allora è irrotazionale in* $\overline{D}$ *(cioè* $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *in* $\overline{D}$*).*

**Dimostrazione.** Dire che $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\varphi$ significa che $v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Dunque per $j = 1, 2, 3$ si ha

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}\,,$$

e dal teorema di Schwarz questo non cambia se si scambiano gli indici. Dunque $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, il che è equivalente a dire che $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. △

**Esempio 1.** Esistono campi irrotazionali che non sono conservativi. L'esempio più classico è il campo magnetico $\mathbf{H}$ generato nel vuoto da una corrente di intensità costante $I_0 > 0$ passante lungo l'asse $x_3$ (per fissare le idee, sia la corrente diretta verso l'alto). Questo campo per $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ (cioè fuori dall'asse $x_3$) è dato da

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, x_3) = \frac{I_0}{2\pi} \left( \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0 \right) .$$

Si verifica facendo direttamente i facili conti (fateli!) che $\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{0}$ e che $\oint_\alpha \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_0 \neq 0$, dove $\boldsymbol{\alpha}$ è la circonferenza contenuta nel piano $x_3 = 0$, di centro $(0, 0)$ e raggio 1, percorsa in verso antiorario; quindi $\mathbf{H}$ non è conservativo nell'insieme $\{x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$, perché non ha tutte le circuitazioni nulle! ◁

Dal Teorema A sappiamo che, per avere certezza che un campo sia conservativo in $\overline{D}$, abbiamo da soddisfare la condizione che la sua circuitazione lungo **qualsiasi** curva chiusa contenuta in $\overline{D}$ sia uguale a 0. Questo, operativamente, mette in campo la necessità di infinite verifiche: una per ogni curva chiusa. Non è quindi una condizione del tutto soddisfacente. Ma il risultato può essere migliorato.

Infatti, si ha:

**Teorema C.** *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *è conservativo in* $\overline{D}$ *se e solo se è irrotazionale ed è uguale a 0 la sua circuitazione lungo qualsiasi curva chiusa contenuta in* $\overline{D}$ *che* **non sia bordo di una superficie** *contenuta in* $\overline{D}$.

**Dimostrazione.** Dai Teoremi B e A segue che se $\mathbf{v}$ è conservativo in $\overline{D}$ allora è irrotazionale e la sua circuitazione lungo qualsiasi curva chiusa contenuta in $\overline{D}$ è uguale a 0.

Viceversa, utilizzando nuovamente il Teorema A, basta dimostrare che se $\mathbf{v}$ è irrotazionale allora è nulla la sua circuitazione lungo qualsiasi curva chiusa che **sia bordo di una superficie** contenuta in $\overline{D}$ (sono solo queste le curve chiuse per cui l'annullarsi della circuitazione non è nota per ipotesi). Ma questo segue subito dal teorema di Stokes e dall'ipotesi di irrotazionalità, poiché, se $\boldsymbol{\alpha} = \partial S$,

$$\oint_{\alpha^+} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0\,,$$

dove il segno + significa che il verso di percorrenza su $\boldsymbol{\alpha}$ è coerente con la scelta del versore normale $\mathbf{n}$ su $S$ (cioè, abbracciando il versore $\mathbf{n}$, nel percorrere la curva $\boldsymbol{\alpha}$ si lascia a sinistra la superficie $S$). △

Anche questo risultato richiede la verifica di infinite condizioni. Un altro passo verso la semplificazione è dato dal seguente teorema.

**Teorema D.** *Supponiamo che:*

($i$) $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *in* $\overline{D}$*;*

($ii$) $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ *siano due curve chiuse contenute in* $\overline{D}$ *la cui unione dia il bordo di una superficie* $S$ *contenuta in* $\overline{D}$ *(si abbia cioè* $\partial S = \{\boldsymbol{\alpha}\} \cup \{\boldsymbol{\beta}\}$*).*

*Allora* $\oint_\alpha \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_\beta \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ *(avendo scelto lo stesso verso di percorrenza per le due curve).*

**Dimostrazione.** Basta applicare il teorema di Stokes alla superficie $S$: si ha

$$0 = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_{\alpha^+} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\beta^+} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

dove il segno + ha lo stesso significato di prima, e dunque $\boldsymbol{\alpha}^+$ e $\boldsymbol{\beta}^+$ sono percorse in verso opposto fra di loro. L'eguaglianza mostra quindi che gli integrali curvilinei, percorsi in verso opposto, hanno segno opposto; di conseguenza percorsi nello stesso verso sono uguali. △

**Definizione 1.** Due curve chiuse contenute in $\overline{D}$ si dicono equivalenti se soddisfano la condizione ($ii$) del Teorema D.

Il Teorema D ci dice che, per un campo irrotazionale, se la circuitazione su una curva è nulla, allora è nulla su tutte le curve ad essa equivalenti. Dunque ci si può aspettare che l'enunciato del Teorema C possa essere semplificato, e si possa richiedere che, oltre all'irrotazionalità, sia uguale a 0 la circuitazione lungo

**qualche** curva chiusa contenuta in $\overline{D}$ che non sia bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$ (per esempio, se su una curva già si sa che la circuitazione è nulla, non serve richiedere che la circuitazione si annulli su qualsiasi altra curva ad essa equivalente).

Il seguente risultato matematico non è di semplice dimostrazione, per cui la ometteremo, ma è molto utile in questo contesto.

**Teorema E.** *Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto, limitato e connesso, con frontiera $\partial D$ regolare a tratti. A $\overline{D}$ è associato un numero intero $M \geq 0$, detto primo numero di Betti di $\overline{D}$.*

*(a) Se $M = 0$ non esistono in $\overline{D}$ curve chiuse che non sono bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$;*

*(b) se $M > 0$ in $\overline{D}$ si possono determinare $M$ curve chiuse $\boldsymbol{\alpha}_k$, $k = 1, \dots, M$, che non sono bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$, e per queste curve la seguente proprietà è soddisfatta: dati un campo $\mathbf{v}$ irrotazionale in $\overline{D}$ e una qualunque altra curva chiusa $\boldsymbol{\alpha}$ contenuta in $\overline{D}$ che non sia bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$, si ha*

$$\oint_{\alpha} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{M} c_{k,\alpha} \oint_{\alpha_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

*con $c_{k,\alpha}$, $k = 1, \dots, M$, opportuni numeri reali (dipendenti da $\boldsymbol{\alpha}$).*

A questo punto come modificare l'enunciato del Teorema C risulta chiaro:

**Teorema F.** *Un campo vettoriale $\mathbf{v}$ è conservativo in $\overline{D}$ se e solo se:*

*(*) è irrotazionale (nel caso si abbia $M = 0$);*

*(**) è irrotazionale ed è uguale a 0 la sua circuitazione lungo ogni curva $\boldsymbol{\alpha}_k$ di cui al punto $(b)$ del Teorema E (nel caso si abbia $M > 0$).*

**Dimostrazione.** Il risultato ora è ovvio. Infatti nel caso $M = 0$, grazie al punto $(a)$ del Teorema E, si replica la dimostrazione del Teorema C (non esistono in $\overline{D}$ curve chiuse che non sono bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$, dunque bisogna provare che la circuitazione è nulla solo sulle curve chiuse che sono bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$). Nel caso $M > 0$ il punto $(b)$ del Teorema E dice che, presa una qualsiasi curva chiusa $\boldsymbol{\alpha}$ contenuta in $\overline{D}$ che non sia bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$, si ha

$$\oint_{\alpha} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{M} c_{k,\alpha} \oint_{\alpha_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

e dunque $\oint_{\alpha} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$ dall'ipotesi $(**)$. Ci si è così ricondotti al Teorema C, e la tesi è dimostrata. △

Le curve $\boldsymbol{\alpha}_k$ sono sostanzialmente l'insieme "fondamentale" di curve chiuse contenute in $\overline{D}$ che non sono bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$. Si tratta ora di capire un po' meglio chi sono queste curve. L'idea geometrica che dobbiamo avere è che $M$ è il numero di "manici" di $\overline{D}$. Facciamo qualche esempio:

- per una sfera il primo numero di Betti $M$ vale 0:
- per un cubo il primo numero di Betti $M$ vale 0;
- per ogni insieme che sia una deformazione "senza strappi" di una sfera o di un cubo il primo numero di Betti $M$ vale 0;
- per una sfera privata di un "nocciolo" interno di forma tipo la sfera o il cubo il primo numero di Betti $M$ vale 0;
- per un toro (una "ciambella") il primo numero di Betti $M$ vale 1, e la curva $\boldsymbol{\alpha}_1$ è l'equatore interno del "foro" (o ogni altra curva ad esso equivalente) (si veda la figura);
- per una sfera privata di un "nocciolo" interno a forma di "ciambella" il primo numero di Betti $M$ vale 1, e la curva $\boldsymbol{\alpha}_1$ è quella che abbraccia il "foro" (o ogni altra curva ad esso equivalente) (si veda la figura);
- per una sfera privata di due "noccioli" interni, ambedue di forma tipo la sfera o il cubo, il primo numero di Betti $M$ vale 0;
- per un bi-toro il primo numero di Betti $M$ vale 2, e le curve $\boldsymbol{\alpha}_1$ ed $\boldsymbol{\alpha}_2$ sono, ad esempio, gli equatori interni dei due "fori" (si veda la figura);
- per il complementare in un cubo di un nodo trifoglio "ingrassato" il primo numero di Betti $M$ vale 1, e la curva $\boldsymbol{\alpha}_1$ è quella che gira attorno a una "canna" del nodo trifoglio (si veda la figura).

Possiamo approfondire ulteriormente:

**Definizione 2.** Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto, limitato e connesso, con frontiera $\partial D$ regolare a tratti. Se $\overline{D}$ ha primo numero di Betti $M$ uguale a 0 si dice che $\overline{D}$ è **omologicamente triviale**.

**Definizione 3.** Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto, limitato e connesso, con frontiera $\partial D$ regolare a tratti. Se ogni curva chiusa contenuta in $\overline{D}$ può essere contratta ad un punto di $\overline{D}$ (senza uscire da $\overline{D}$) si dice che $\overline{D}$ è **semplicemente connesso**.

Un primo risultato interessante è il seguente:

**Teorema G.** *Una curva chiusa contenuta in $\overline{D}$ che può essere contratta ad un punto di $\overline{D}$ (senza uscire da $\overline{D}$) è bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$.*

**Dimostrazione.** La curva, mentre si contrae ad un punto, "spazza" una superficie, il cui bordo è proprio la curva iniziale. △

Quindi fra i due concetti descritti nelle Definizioni 2 e 3 c'è una prima relazione evidente:

**Teorema H.** *Un insieme semplicemente connesso è omologicamente triviale.*

**Dimostrazione.** Basta osservare che, dal Teorema G, ogni curva chiusa, siccome si può contrarre ad un punto, è bordo di una superficie. △

È interessante cercare di capire se vale anche il viceversa. In questo senso, l'esempio seguente sembra indicare che il viceversa non è vero.

**Esempio 2.** Ci sono curve chiuse che non si possono contrarre ad un punto ma che sono bordo di una superficie (si veda la figura riguardante il complementare di un nodo trifoglio "ingrassato": la curva in questione è la curva blu indicata con $\boldsymbol{\beta}$).

Ma, a questo punto con un po' di sorpresa, vale invece il seguente risultato (la cui dimostrazione non è affatto semplice, per cui la ometteremo):

**Teorema I. [Borsuk; Benedetti-Frigerio-Ghiloni]** *Un insieme omologicamente triviale è semplicemente connesso.*

Questo ci dice che nell'esempio in figura ci deve essere una curva chiusa che non è bordo di una superficie contenuta in $\overline{D}$ (se non ci fosse, allora $\overline{D}$ sarebbe omologicamente triviale, e dunque, da questo teorema, semplicemente connesso; ma abbiamo visto che in $\overline{D}$ ci sono curve chiuse che non possono essere contratte ad un punto, quindi $\overline{D}$ non può essere semplicemente connesso). In effetti si vede che questa curva c'è: ad esempio, la curva rossa $\boldsymbol{\alpha}_1$ nella figura riguardante il complementare di un nodo trifoglio "ingrassato".

In conclusione, possiamo rileggere la parte (∗) del Teorema F in questo modo (che è più consueto nei libri di testo):

**Teorema J.** *Sia $\overline{D}$ un insieme semplicemente connesso. Allora un campo vettoriale $\mathbf{v}$ è conservativo in $\overline{D}$ se e solo se è irrotazionale in $\overline{D}$.*

- **Potenziali vettori.**

Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto limitato e connesso (cioè "fatto di un solo pezzo"), con frontiera $\partial D$ regolare a tratti. Vogliamo capire quando in $\overline{D}$ è possibile esprimere un campo vettoriale $\mathbf{v}$ come rotore di un potenziale vettore $\mathbf{A}$, cioè vogliamo capire quando si ha $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$ in $\overline{D}$. Si noti che in questo capitolo, quando parleremo di superficie, intenderemo sempre una superficie orientabile regolare a tratti.

Il primo risultato è questo:

**Teorema A*.** *Un campo vettoriale $\mathbf{v}$ è rotore di un potenziale vettore $\mathbf{A}$ in $\overline{D}$ se e solo se è uguale a 0 il suo flusso attraverso* **qualsiasi** *superficie chiusa contenuta in $\overline{D}$.*

**Dimostrazione.** Se $S$ è una superficie chiusa si ha

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0\,,$$

avendo usato per l'ultima uguaglianza il teorema di Stokes per superfici chiuse.

Il viceversa si ottiene con procedimenti non completamente semplici, per cui ne omettiamo la dimostrazione. △

Un secondo importante risultato è:

**Teorema B*.** *Se un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *è rotore di un potenziale vettore in* $\overline{D}$*, allora è solenoidale in* $\overline{D}$ *(cioè* $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ *in* $\overline{D}$*).*

**Dimostrazione.** Dire che $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$ significa che

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) .$$

È immediato verificare che

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) = 0\,,$$

dove l'uguaglianza delle derivate seconde in ordine scambiato segue dal teorema di Schwarz. △

**Esempio 1*.** Esistono campi solenoidali che non sono rotore di un potenziale vettore. L'esempio più classico è il campo elettrico $\mathbf{E}$ generato nel vuoto da una carica $q_0 > 0$ (per fissare le idee, situata nell'origine $(0,0,0)$). Questo campo per $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ (cioè fuori dall'origine) è dato da

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \left( x_1, x_2, x_3 \right) \,,$$

dove $\epsilon_0 > 0$ è la permittività elettrica del vuoto. Si verifica facendo direttamente i facili conti (fateli!) che $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ e che $\iint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{q_0}{\epsilon_0} \neq 0$, dove $S$ è la superficie della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1; quindi $\mathbf{E}$ non è rotore di un potenziale vettore nell'insieme $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0\}$, perché non ha tutti i flussi nulli! ◁

Dal Teorema A* sappiamo che, per avere certezza che un campo sia rotore di un potenziale vettore in $\overline{D}$, abbiamo da soddisfare la condizione che il suo flusso attraverso **qualsiasi** superficie chiusa contenuta in $\overline{D}$ sia uguale a 0. Questo, operativamente, mette in campo la necessità di infinite verifiche: una per ogni superficie chiusa. Non è quindi una condizione del tutto soddisfacente. Ma il risultato può essere migliorato.

Infatti, si ha:

**Teorema C*.** *Un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *è rotore di un potenziale vettore in* $\overline{D}$ *se e solo se è solenoidale ed è uguale a 0 il suo flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa contenuta in* $\overline{D}$ *che* **non sia bordo di un aperto connesso** *contenuto in* $\overline{D}$*.*

**Dimostrazione.** Dai Teoremi B* e A* segue che se $\mathbf{v}$ è rotore di un potenziale vettore in $\overline{D}$ allora è solenoidale e il suo flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa contenuta in $\overline{D}$ è uguale a 0.

Viceversa, utilizzando nuovamente il Teorema A*, basta dimostrare che se $\mathbf{v}$ è rotore di un potenziale vettore allora è nullo il suo flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa che **sia bordo di un aperto connesso** contenuto in $\overline{D}$ (sono solo queste le superfici chiuse regolari a tratti per cui l'annullarsi del flusso non è noto per ipotesi). Ma questo segue subito dal teorema della divergenza, poiché, se $S = \partial V$,

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx_1dx_2dx_3 = 0\,,$$

avendo usato l'ipotesi di solenoidalità. △

Anche questo risultato richiede la verifica di infinite condizioni. Un altro passo verso la semplificazione è dato dal seguente teorema.

**Teorema D*.** *Supponiamo che:*

$(i)$ $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ *in* $\overline{D}$*;*

$(ii)$ $S_1$ *e* $S_2$ *siano due superfici chiuse contenute in* $\overline{D}$ *la cui unione dia il bordo di un aperto connesso* $V$ *contenuto in* $\overline{D}$ *(si abbia cioè* $\partial V = S_1 \cup S_2$*).*

*Allora* $\iint_{S_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$ *(avendo scelto sia su* $S_1$ *che su* $S_2$ *la normale* $\mathbf{n}$ *che punta verso l'esterno della regione da ciascuna di loro racchiusa).*

**Dimostrazione.** L'insieme $V$ è delimitato dalle due superfici chiuse $S_1$ ed $S_2$, che saranno quindi una dentro l'altra. Per fissare le idee sia $S_1$ quella più interna ed $S_2$ la più esterna. Allora il versore normale $\mathbf{n}_{\rm ext}$ esterno a $V$ su $S_1$ punta verso l'interno della regione racchiusa da $S_1$, mentre il versore normale $\mathbf{n}_{\rm ext}$ esterno a $V$ su $S_2$ punta verso l'esterno della regione racchiusa da $S_2$. Applicando il teorema della divergenza all'insieme $V$ si ha:

$$0 = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{S_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\rm ext}\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\rm ext}\, dS\,.$$

Su $S_1$ il versore $\mathbf{n}_{\rm ext}$ punta nella direzione opposta al versore $\mathbf{n}$ scelto nella tesi del teorema, cioè su $S_1$ si ha $\mathbf{n}_{\rm ext} = -\mathbf{n}$; su $S_2$ il versore $\mathbf{n}_{\rm ext}$ punta nella stessa direzione del versore $\mathbf{n}$ scelto nella tesi del teorema, cioè su $S_2$ si ha $\mathbf{n}_{\rm ext} = \mathbf{n}$. Dunque quest'ultima eguaglianza fornisce il risultato richiesto. △

**Definizione 1*.** Due superfici chiuse contenute in $\overline{D}$ si dicono equivalenti se soddisfano la condizione $(ii)$ del Teorema D*.

Il Teorema D* ci dice che, per un campo solenoidale, se il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo, allora è nullo attraverso tutte le superfici ad essa equivalenti. Dunque ci si può aspettare che l'enunciato del Teorema C* possa essere semplificato, e si possa richiedere che, oltre alla solenoidalità, sia uguale a 0 il flusso attraverso **qualche** superficie chiusa contenuta in $\overline{D}$ che non sia bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$ (per esempio, se attraverso una superficie chiusa già si sa che il flusso è nullo, non serve richiedere che il flusso si annulli attraverso qualsiasi altra superficie ad essa equivalente).

Il seguente risultato matematico è molto utile in questo contesto.

**Teorema E*.** *Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto, limitato e connesso. A $\overline{D}$ è associato un numero intero $M^* \geq 0$, detto secondo numero di Betti di $\overline{D}$, ed $M^*+1$ coincide con il numero delle componenti connesse del bordo $\partial D$ (cioè il numero dei "pezzi" di cui è composto $\partial D$).*

*(a) Se $M^* = 0$ (cioè il bordo $\partial D$ è connesso) non esistono in $\overline{D}$ superfici chiuse che non sono bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$;*

*(b) se $M^* > 0$, dette $S_j$, $j = 1, \ldots, M^*$, le componenti connesse interne di $\partial D$ (ed $S_0$ la componente connessa più esterna che le racchiude tutte), dati un campo $\mathbf{v}$ solenoidale in $\overline{D}$ e una qualunque altra superficie chiusa $S$ contenuta in $\overline{D}$ che non sia bordo di una aperto connesso contenuto in $\overline{D}$ si ha*

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \sum_{j=1}^{M^*} c^*_{j,S} \iint_{S_j} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS\,,$$

*con $c^*_{j,S}$, $j = 1, \ldots, M^*$, opportuni numeri reali (dipendenti da $S$).*

**Dimostrazione.** (a) Se $M^* = 0$, allora il bordo $\partial D$ è connesso, e dunque non ci sono "buchi" dentro $\overline{D}$. Quindi qualunque superficie chiusa contenuta in $\overline{D}$ è bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$.

(b) Se $M^* > 0$ la superficie chiusa $S$, che non è bordo in un aperto connesso, include qualche componente connessa $S_j$; per fissare le idee, siano $S_1$,...,$S_K$ queste componenti connesse, per un certo $K$ con $1 \leq K \leq M^*$. Allora la regione racchiusa in $S$ ha come bordo l'unione di $S$ e delle superfici $S_1$,...,$S_K$. Applicando il teorema della divergenza a questa regione, che chiameremo $Q$, e usando l'ipotesi di solenoidalità si ha

$$0 = \iiint_Q \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\rm ext}\, dS + \sum_{j=1}^{K} \iint_{S_j} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\rm ext}\, dS\,,$$

ove $\mathbf{n}_{\rm ext}$ è il versore normale che punta verso l'esterno di $Q$. Questo dà la tesi, con $c^*_{j,S} = \pm 1$ (quale dei due valori è determinato da come si è scelto il versore $\mathbf{n}$ su $S$ e sulle superfici $S_j$) per $j = 1, \ldots, K$ (e $c^*_{j,S} = 0$ per $j = K+1, \ldots, M^*$, se $K < M^*$). △

A questo punto come modificare l'enunciato del Teorema C* risulta chiaro:

**Teorema F*.** *Un campo vettoriale $\mathbf{v}$ è rotore di un potenziale vettore in $\overline{D}$ se e solo se:*

*(*) è solenoidale (nel caso si abbia $M^* = 0$, cioè il bordo $\partial D$ sia connesso);*

*(**) è solenoidale ed è uguale a 0 il suo flusso attraverso ogni componente connessa $S_j$ del bordo $\partial D$, $j = 1, \ldots, M^*$ (nel caso si abbia $M^* > 0$).*

**Dimostrazione.** Il risultato ora è ovvio. Infatti nel caso $M^* = 0$, grazie al punto ($a$) del Teorema E*, si replica la dimostrazione del Teorema C* (non esistono in $\overline{D}$ superfici chiuse che non sono bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$, dunque bisogna provare che il flusso è nullo solo sulle superfici chiuse che sono bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$). Nel caso $M^* > 0$ il punto ($b$) del Teorema E* dice che, presa una qualsiasi superficie chiusa $S$ contenuta in $\overline{D}$ che non sia bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$, si ha

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_{j=1}^{M^*} c^*_{j,S} \iint_{S_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \,,$$

e dunque $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ dall'ipotesi ($**$). Ci si è così ricondotti al Teorema C*, e la tesi è dimostrata. $\triangle$

Le componenti connesse $S_j$ sono sostanzialmente l'insieme "fondamentale" di superfici chiuse contenute in $\overline{D}$ che non sono bordo di un aperto connesso contenuto in $\overline{D}$. Facciamo qualche esempio:

- per una sfera il secondo numero di Betti $M^*$ vale 0:
- per un cubo il secondo numero di Betti $M^*$ vale 0;
- per ogni insieme che sia una deformazione "senza strappi" di una sfera o di un cubo il secondo numero di Betti $M^*$ vale 0;
- per una sfera privata di un "nocciolo" interno di forma tipo la sfera o il cubo il secondo numero di Betti $M^*$ vale 1, ed $S_1$ è la superficie del "nocciolo" (si veda la figura);
- per un toro (una "ciambella") il secondo numero di Betti $M^*$ vale 0;
- per una sfera privata di un "nocciolo" interno a forma di "ciambella" il secondo numero di Betti $M^*$ vale 1, ed $S_1$ è la superficie del "nocciolo" (si veda la figura);
- per una sfera privata di due "noccioli" interni, ambedue di forma tipo la sfera o il cubo, il secondo numero di Betti $M^*$ vale 2, ed $S_1$ e $S_2$ sono le superfici dei "noccioli" (si veda la figura);
- per un bi-toro il secondo numero di Betti $M^*$ vale 0;
- per il complementare in un cubo di un nodo trifoglio "ingrassato" il secondo numero di Betti $M^*$ vale 1, ed $S_1$ è la superficie del nodo trifoglio "ingrassato" (si veda la figura).