Equazioni della fisica matematica

- **Equazione di conservazione della massa in fluidodinamica**

Questo principio della fisica si può scrivere come

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = -\iint_{\partial V} \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS\,,$$

ove V è una generica porzione di spazio occupata dal fluido, ρ è la densità e $\mathbf{v}$ la velocità del fluido, ed $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie ∂V, che qui, come sempre nel seguito, sarà considerato come orientato verso l'esterno di V. Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \tag{1}$$

[Bramanti-Pagani-Salsa, Analisi Matematica 2, pag. 338.]

- **Equazione di conservazione della quantità di moto in fluidodinamica**

Analogamente al caso della conservazione della massa, questo principio della fisica si può scrivere, per ogni componente ρv_i, $i = 1, 2, 3$, come

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho v_i\, dV = -\iint_{\partial V} \rho v_i \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS - \iint_{\partial V} p\, n_i\, dS + \iint_{\partial V} (\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})_i\, dS + \iiint_V \rho f_i\, dV\,,$$

ove V è una generica porzione di spazio occupata dal fluido, $\mathbf{f}$ è l'accelerazione delle forze esterne, ρ è la densità, $\mathbf{v}$ la velocità, p la pressione del fluido, $\mathbf{T}$ è il tensore delle tensioni interne viscose, e l'espressione $(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})_i$ significa

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} n_k\,.$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene (notando che $pn_i = p\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{n}$ e $\mathrm{div}(p\mathbf{e}_i) = \frac{\partial p}{\partial x_i}$, e similmente, per ogni $i = 1, 2, 3$, $T_{ik}n_k = T_{ik}\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{n}$ e $\mathrm{div}(T_{ik}\mathbf{e}_k) = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$, avendo indicato con $\mathbf{e}_k$ il versore dell'asse x_k)

$$\begin{aligned}
&-\iint_{\partial V} \rho v_i \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS - \iint_{\partial V} p n_i\, dS + \iint_{\partial V} (\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})_i\, dS \\
&\qquad = -\iiint_V \mathrm{div}(\rho v_i \mathbf{v})\, dV - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x_i}\, dV + \iiint_V \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, dV\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \rho f_i \right) dV = 0$$

Data l'arbitrarietà del volume V si ottiene

$$\frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \mathbf{grad}\, p - \mathrm{div}\,\mathbf{T} = \rho\,\mathbf{f}\,,$$

avendo indicato con $\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ il tensore di elementi $\rho v_i v_k$ e con $\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})$ e $\mathrm{div}\,\mathbf{T}$ i vettori la cui i-esima componente è $\mathrm{div}(\rho v_i\mathbf{v})$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$, rispettivamente.

Per i fluidi viscosi classici il tensore delle tensioni $\mathbf{T}$ è dato da

$$T_{ik} = 2\,\mu\,D_{ik} + \Big(\zeta - \frac{2}{3}\mu\Big)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\delta_{ik}\,,$$

ove le costanti $\mu > 0$ e $\zeta \geq 0$ sono i coefficienti di viscosità di scorrimento e di volume, rispettivamente,

$$D_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

è la parte simmetrica della matrice jacobiana di $\mathbf{v}$, e δ_{ik} è il tensore di Kronecker (che vale 1 per $i = k$ e 0 altrimenti).

Di conseguenza l'equazione diviene

$$\frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \mathbf{grad}\,p - \mu\Delta\mathbf{v} - \Big(\zeta + \frac{1}{3}\mu\Big)\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{f}\,, \tag{2}$$

poiché $\mathrm{div}\,\mathbf{T} = \mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$.

- **Equazione di incomprimibilità in fluidodinamica**

Questo principio della fisica si può scrivere come conservazione di ogni volume di fluido nel corso del moto:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} 1\,dV = 0\,,$$

ove $V(t)$ è la regione di spazio occupata dal fluido all'istante t. Si sta quindi seguendo il fluido nel suo moto, con un'impostazione lagrangiana.

Dimostriamo innanzitutto una relazione generale (il cosiddetto teorema del trasporto):

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} f\,dV = \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,f + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)\,dV\,, \tag{3}$$

dove f è una qualunque funzione e $\mathbf{v}$ è la velocità del fluido.

Per dimostrare questo risultato introduciamo il campo vettoriale $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$, che è la posizione all'istante t della particella che all'istante 0 stava in $\mathbf{x}$. Dunque si ha $V(t) = \{\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})\,|\,\mathbf{x} \in V(0)\}$. Dato che il fluido si muove con velocità $\mathbf{v}$, il campo vettoriale $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$ soddisfa al seguente problema di Cauchy (in cui $\mathbf{x}$ viene considerato come parametro fissato):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})) \quad \text{for } t > 0\,, \\ \mathbf{\Phi}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}\,. \end{cases} \tag{4}$$

In altri termini, la posizione $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$, che è determinata dalla velocità del fluido, si ottiene integrando la velocità lungo la traiettoria che la particella di fluido sta percorrendo.

Siamo ora in grado di completare la verifica della relazione (3): innanzitutto si ha, per cambiamento di variabili $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$ ad ogni t fissato,

$$\iiint_{V(t)} f(t, \mathbf{X})\,d\mathbf{X} = \iiint_{V(0)} f(t, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}))|\det \mathrm{Jac}\,\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\,. \tag{5}$$

Poi si può dimostrare (ma non lo faremo qui...[1]) che a $\mathbf{x}$ fissato la funzione $j(t) = \det \operatorname{Jac} \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} j'(t) = (\operatorname{div} \mathbf{v})(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x}))\, j(t) \quad \text{for } t > 0\,, \\ j(0) = \det \operatorname{Jac} \mathbf{x} = 1\,, \end{cases} \tag{6}$$

per cui in particolare

$$j(t) = \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{v})(s, \boldsymbol{\Phi}(s, \mathbf{x}))\, ds \right) > 0\,.$$

Dunque nella formula (5) il modulo di $j(t) = \det \operatorname{Jac} \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})$ può essere tolto.

Veniamo finalmente al calcolo della derivata rispetto al tempo: si ha, derivando (5), passando la derivata dentro il segno di integrale e usando la regola di derivazione del prodotto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f\, dV &= \frac{d}{dt} \iiint_{V(0)} f(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x}))\, \det \operatorname{Jac} \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \iiint_{V(0)} \frac{d}{dt}[f(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x}))]\, \det \operatorname{Jac} \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \iiint_{V(0)} f(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})) \frac{d}{dt}[\det \operatorname{Jac} \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})]\, d\mathbf{x},. \end{aligned}$$

Usando (4) nel primo addendo si ottiene, per derivazione di funzione composta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x}))] &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial X_i}(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})) \frac{d\Phi_i}{dt}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial X_i}(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})) v_i(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, f \right)(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x}))\,. \end{aligned}$$

[1] Bensì qui nella nota: ma solo in due variabili, perché i conti sono sostanzialmente gli stessi che in tre variabili, ma occupano meno spazio. Dunque, per $\mathbf{x}$ fissato, sia $j(t) = \det \operatorname{Jac} \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x})$: tralasciando da qui in avanti la dipendenza da t ed $\mathbf{x}$ si ha

$$j = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\,.$$

Dalla regola di derivazione del prodotto, scambiando l'ordine di derivazione fra tempo e spazio, usando (4) e indicando con $g \circ \boldsymbol{\Phi}$ la funzione $(t, \mathbf{x}) \to g(t, \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{x}))$, otteniamo

$$\begin{aligned} j' &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial x_2} \\ &= \frac{\partial (v_1 \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial (v_2 \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial x_2} - \frac{\partial (v_2 \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \frac{\partial (v_1 \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial x_2}\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Per derivazione di funzione composta per $k, j = 1, 2$ si ha

$$\frac{\partial (v_k \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial v_k}{\partial X_1} \circ \boldsymbol{\Phi} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial v_k}{\partial X_2} \circ \boldsymbol{\Phi} \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j}\,.$$

Inserendo questi risultati in $(*)$ ed eliminando i termini di segno opposto si ottiene facilmente

$$j' = [(\operatorname{div} \mathbf{v}) \circ \boldsymbol{\Phi}] \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right)\,,$$

cioè (6).

Usando (6) nel secondo addendo si trova

$$f(t, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})) \frac{d}{dt}[\det \mathrm{Jac}\, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})] = (f \operatorname{div} \mathbf{v})(t, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})) \det \mathrm{Jac}\, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) .$$

Si è quindi ottenuto

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(t, \mathbf{X})\, d\mathbf{X} = \iiint_{V(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, f + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) (t, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) \det \mathrm{Jac}\, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} ,$$

e il teorema di trasporto segue riportando l'integrale in $V(t)$ con il cambiamento di variabile $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$.

Prendendo $f = 1$ in (3) segue che

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} 1\, d\mathbf{X} = \iiint_{V(t)} \operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{X})\, d\mathbf{X} \qquad \text{per} \quad t > 0 .$$

Dall'arbitrarietà del volume $V(t)$ segue che l'equazione di incomprimibilità si può esprimere come

(7) $$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 .$$

- **Equazione dell'elettrostatica in elettromagnetismo**

Questo principio della fisica si può scrivere come

$$\iint_{\partial V} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \rho\, dV ,$$

ove V è una generica porzione di spazio, ρ è la densità di carica, $\mathbf{E}$ è il campo elettrico e $\epsilon > 0$ è la permittività elettrica. Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

(8) $$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \rho .$$

Se il problema considerato è indipendente dal tempo, dall'equazione di Faraday (si veda (11) più avanti...) viene $\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{0}$. In un dominio semplicemente connesso questo equivale a $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, \varphi$, ove φ è il potenziale elettrico, per cui (8) diventa

$$-\operatorname{div}(\epsilon\, \mathbf{grad}\, \phi) = \rho ;$$

nel caso in cui ϵ sia una costante, si arriva a

$$-\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon} ,$$

dato che $\operatorname{div} \mathbf{grad} = \Delta$.

[Bramanti-Pagani-Salsa, Analisi Matematica 2, pag. 337.]

- **Equazione della magnetostatica in elettromagnetismo**

Questo principio della fisica si può scrivere come

$$\iint_{\partial V} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 ,$$

ove V è una generica porzione di spazio, $\mathbf{H}$ è il campo elettrico e $\mu > 0$ è la permeabilità magnetica: in altri termini, non esistono "cariche magnetiche" isolate. Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0\,. \tag{9}$$

- **Equazione di Ampère in elettromagnetismo**

Questo principio della fisica si può scrivere come

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial^+ S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

ove S è una generica superficie nello spazio, $\mathbf{J}$ è la densità di corrente e $\mathbf{H}$ il campo magnetico: in altri termini, il flusso della densità di corrente, cioè l'intensità di corrente, attraverso una superficie è uguale alla circuitazione del campo magnetico lungo il bordo della superficie (percorso nel verso coerente con la normale ad S, cioè in modo che, abbracciando la normale, si lasci a sinistra la superficie S). La legge però richiede che la densità di corrente sia costante nel tempo: in caso contrario, bisogna considerare la più generale equazione di Maxwell–Ampère (si veda (13) più avanti...).

Applicando il teorema di Stokes si ha

$$\int_{\partial^+ S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS\,,$$

e dunque

$$\iint_S (\mathbf{rot}\, \mathbf{H} - \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n}\, dS\,.$$

Dall'arbitrarietà della superficie S (che può essere in ogni posizione del dominio considerato, e con qualsiasi orientazione della sua normale) si ottiene la relazione vettoriale

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J}\,. \tag{10}$$

- **Equazione di Faraday in elettromagnetismo**

Questo principio della fisica si può scrivere come

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS = - \int_{\partial^+ S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

ove S è una generica superficie nello spazio, $\mathbf{H}$ è il campo magnetico, $\mathbf{E}$ è il campo elettrico e μ la permeabilità magnetica: in altri termini, la variazione in tempo del flusso dell'induzione magnetica $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ attraverso una superficie è uguale all'opposto alla circuitazione del campo elettrico lungo il bordo della superficie (percorso nel verso coerente con la normale ad S, cioè in modo che, abbracciando la normale, si lasci a sinistra la superficie S).

Applicando il teorema di Stokes si ha

$$\int_{\partial^+ S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS\,,$$

e dunque

$$\iint_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0\,.$$

Dall'arbitrarietà della superficie S (che può essere in ogni posizione del dominio considerato, e con qualsiasi orientazione della sua normale) si ottiene la relazione vettoriale

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}\,. \tag{11}$$

[Bramanti-Pagani-Salsa, Analisi Matematica 2, pag. 342, esempio 6.3.]

- **Equazione di conservazione della carica in elettromagnetismo**

Similmente al principio di conservazione della massa, questo principio della fisica si può scrivere come

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = -\iint_{\partial V} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS\,,$$

ove V è una generica porzione di spazio occupata dal fluido, ρ è la densità di carica e $\mathbf{J}$ la densità di corrente. Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0\,. \tag{12}$$

- **Equazione di Maxwell–Ampère in elettromagnetismo**

È una generalizzazione dell'equazione di Ampère al caso dipendente dal tempo. Partendo da (8) e facendo la derivata in tempo si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div}(\epsilon\mathbf{E})}{\partial t}\,;$$

utilizzando (12) ne viene

$$-\operatorname{div}\mathbf{J} = \frac{\partial \operatorname{div}(\epsilon\mathbf{E})}{\partial t}\,,$$

quindi

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \epsilon\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}\right) = 0\,.$$

In una regione dello spazio la cui frontiera sia connessa questa relazione dice che la quantità $\frac{\partial \epsilon\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$ deve avere un potenziale vettore, cioè deve esistere un campo vettoriale $\mathbf{A}$ per cui

$$\frac{\partial \epsilon\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}\,.$$

Nel caso non dipendente dal tempo da (10) sappiamo che $\mathbf{A} = \mathbf{H}$, dunque è coerente con le equazioni dell'elettromagnetismo già determinate che valga

$$\frac{\partial \epsilon\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \mathbf{rot}\,\mathbf{H}\,, \tag{13}$$

che è l'equazione che Maxwell propose come generalizzazione dell'equazione di Ampère al caso dipendente dal tempo.

[Non esattamente con questo approccio, ma con lo stesso risultato: Bramanti-Pagani-Salsa, Analisi Matematica 2, pag. 344, esercizio 32.]

- **Equazione di conduzione del calore**

In modo simile al principio di conservazione della carica, questo principio della fisica si può scrivere come

$$\frac{d}{dt}\iiint_V c_v \rho\, \vartheta\, dV = -\iint_{\partial V} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, dS + \iiint_V q\, dV\,,$$

ove V è una generica porzione di spazio occupata dal corpo considerato, ϑ è la temperatura, $\mathbf{j}$ è la densità del flusso di calore, q è la densità della sorgente di calore (per unità di tempo), e le costanti $\rho > 0$ e $c_v > 0$ sono la densità e il calore specifico a volume costante, rispettivamente. Applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$c_v \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = q\,.$$

La legge di Fourier della conduzione del calore afferma che

$$\mathbf{j} = -k\, \mathbf{grad}\, \vartheta\,,$$

dove $k > 0$ è la diffusività. [Per motivare il segno $-$ che lega $\mathbf{j}$ a $\mathbf{grad}\, \vartheta$, si pensi al fatto che il flusso di calore è diretto dalle zone a temperatura più alta verso quelle a temperatura più bassa, mentre accade l'opposto per il gradiente di temperatura.]

Inserendo questa relazione nell'equazione precedente si ottiene

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{1}{c_v \rho} \operatorname{div}(k\, \mathbf{grad}\, \vartheta) = \frac{1}{c_v \rho}\, q\,;$$

se k è costante, si conclude con

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \kappa\, \Delta \vartheta = \frac{1}{c_v \rho}\, q\,, \tag{14}$$

ove $\kappa = \frac{k}{c_v \rho}$.

Nel caso il problema sia indipendente dal tempo (quindi in particolare la sorgente q non dipenda dal tempo) questo diventa

$$-\Delta \vartheta = \frac{1}{k}\, q\,.$$