L'integrale triplo n° 5.

La regione Ω è quella che sta all'interno della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{3}$ e al di sopra del paraboloide $z = \frac{x^2+y^2}{2}$.

Se intersechiamo le due superfici otteniamo

$$3 = x^2+y^2+\frac{(x^2+y^2)^2}{4} \iff (x^2+y^2)^2+4(x^2+y^2)-12=0$$

che dà $x^2+y^2 = -2 \mp \sqrt{4+12} = -2 \mp 4 = \begin{cases} -6 & \text{(da scartare, perché } x^2+y^2 \geq 0) \\ 2. \end{cases}$

Dunque si può integrare per fili nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$ (chiamiamolo C), con l'estremo inferiore del filo che è $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ e l'estremo superiore del filo che è $z = \sqrt{3-x^2-y^2}$.

Quindi

$$\iiint_\Omega (x+y+z)^2 \, dx\,dy\,dz = \iint_C dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} (x+y+z)^2 \, dz =$$

$$= \iint_C dx\,dy \left[\frac{1}{3}(x+y+z)^3 \Big|_{z=\frac{x^2+y^2}{2}}^{z=\sqrt{3-x^2-y^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_C \left[\left(x+y+\sqrt{3-x^2-y^2}\right)^3 - \left(x+y+\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3 \right] dx\,dy = I.$$

Sviluppando i due cubi, si semplifica il termine $(x+y)^3$, che compare con segno opposto. Rimane

$$I = \frac{1}{3} \iint_C \Big[3(x+y)^2\sqrt{3-x^2-y^2} + 3(x+y)(3-x^2-y^2) + (3-x^2-y^2)^{3/2} -$$
$$- 3(x+y)^2 \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 3(x+y)\frac{(x^2+y^2)^2}{4} - \frac{(x^2+y^2)^3}{8} \Big] dx\,dy.$$

Siccome C è simmetrico rispetto alla trasformazione $(x,y) \to (-x,-y)$, i termini dispari $3(x+y)(3-x^2-y^2)$ e $-3(x+y)\frac{(x^2+y^2)^2}{4}$ danno un contributo nullo all'integrale. Rimangono quindi quattro addendi. Cambiando variabili con le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\rho \in [0, \sqrt{2}]$, si ha

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho\, \overset{\text{jacobiano!}}{\rho} \left[3\rho^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{3-\rho^2} + (3-\rho^2)^{3/2} - 3\rho^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^6}{8} \right] =$$

↳ tenendo conto che $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ e $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = 0$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \left[3\rho^3\sqrt{3-\rho^2} + \rho(3-\rho^2)^{3/2} - \frac{3}{2}\rho^5 - \frac{1}{8}\rho^7 \right].$$

L'integrale $\int_0^{\sqrt{2}} 3\rho^3\sqrt{3-\rho^2}\, d\rho$ si fa per parti:

$$\int_0^{\sqrt{2}} 3\rho^3\sqrt{3-\rho^2}\, d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} (-\rho^2)\underbrace{\left(-3\rho\sqrt{3-\rho^2}\right)}_{\text{questa è la derivata di } (3-\rho^2)^{3/2}} d\rho = -\rho^2(3-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + \int_0^{\sqrt{2}} (3-\rho^2)^{3/2}2\rho\, d\rho$$

$$= -2(3-2)^{3/2} + 2\int_0^{\sqrt{2}} \rho(3-\rho^2)^{3/2} d\rho.$$

Quindi

$$I = \frac{1}{3}2\pi\left[\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho(3-\rho^2)^{3/2} d\rho - 2 + \int_0^{\sqrt{2}} \rho(3-\rho^2)^{3/2} d\rho - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\rho^6\Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{64}\rho^8\Big|_0^{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[\int_0^{\sqrt{2}} 3\rho(3-\rho^2)^{3/2} d\rho - 2 - \frac{8}{4} - \frac{16}{64}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[-3\frac{\cancel{2}}{5}(3-\rho^2)^{5/2}\frac{1}{\cancel{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} - 4 - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[-\frac{3}{5}(3-2)^{5/2} + \frac{3}{5}3^{5/2} - \frac{17}{4}\right] = \frac{2}{3}\pi\left(-\frac{3}{5} + \frac{27}{5}\sqrt{3} - \frac{17}{4}\right) =$$

$$= \frac{18}{5}\sqrt{3}\pi - \frac{97}{30}\pi.$$