L' integrale triplo n°9.

La regione $x^2+y^2 \le x$ è la regione $(x^2-x+1/4)+y^2 \le 1/4$, cioè il cerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$. Chiamiamolo C.

Dunque si può integrare per fili in C, con z che va da 0 a $\sqrt{1-x^2-y^2}$.

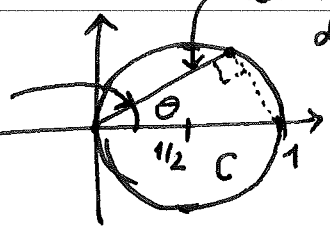
$$V = \iint_C \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_C \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\,dy .$$

Svolgiamo l'integrale doppio in C in coordinate polari.

Guardando la figura si vede che

la lunghezza di questo cateto è data da $\cos\theta$!

[L'angolo θ varia da $-\pi/2$ a $\pi/2$



[Inserendo nell'equazione $x^2+y^2 \le x$ i valori $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ si trova $\rho^2 \le \rho\cos\theta \Rightarrow \rho \le \cos\theta$. Questa via analitica dà giustamente lo stesso risultato dell'analisi di tipo geometrico...]

Dunque si ha

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1-\rho^2}\, \underbrace{\rho}_{\text{Jacobiano!}}\, d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[1-(1-\cos^2\theta)^{3/2}\right] d\theta = \frac{1}{3}\left[\pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2} d\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}\theta|^3 d\theta\right] \underset{|\operatorname{sen}\theta| \text{ è pari...}}{=} \frac{1}{3}\left[\pi - 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\pi - 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta\right] = \frac{1}{3}\left[\pi + 2\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} - 2\,\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\pi - 2 + \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$