Che cosa vuol dire $\sin x \approx x$ (per $x \to 0$)? (E a che cosa serve?)

1. Che cosa vuol dire è semplice: $\sin x \approx x$ per $x \to 0$ significa per definizione
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

2. Rispondere alla domanda "a che cosa serve?" può portare in varie direzioni. Un aspetto che sicuramente ci interessa è questo: informazioni di questo tipo possono essere utili nel calcolo dei limiti di forme indeterminate. Ad esempio:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \sin(3x)}{-x^3+5x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \frac{\sin(3x)}{3x} 3x}{-x^3+5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{6x^3}{-x^3+5x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \lim_{x\to 0} \frac{6x^3}{x^3(-1+5x)} = -6\,,\end{aligned}$$
poiché $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$. [Ponendo $t = 3x$, ci si riconduce a $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.]
Altro esempio:
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - \sin^2(2x)}{4x^3+2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(2x - \frac{4\sin^2(2x)}{4x^2}\right)}{x^2(4x+2)} = \frac{-4}{2} = -2\,,$$
poiché $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{4x^2} = 1$ (ponendo $t = 2x$...).

3. È però necessario procedere correttamente. Vediamo un esempio di procedimento **scorretto**, declinandolo in due casi: uno in cui il risultato è esatto (e vedremo perché), e un altro che invece conduce a un risultato sbagliato. [Questi due esempi sono simili a quelli presentati a lezione, anche se probabilmente non identici, perché a memoria non me li ricordo esattamente.]

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \sin x - x}{x^4 - 3x^2}$

   Siccome $\sin x \approx x$, si deduce che $2x^2 + \sin x - x \approx 2x^2$ [**attenzione**: questa modo di ragionare **non è giusto in generale**!!], e quindi
$$\frac{2x^2 + \sin x - x}{x^4 - 3x^2} \approx \frac{2x^2}{x^4-3x^2} = \frac{2x^2}{x^2(x^2-3)} \to \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\,.$$

   b. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + \sin x - x}{x^4 - 3x^3}$

   Siccome $\sin x \approx x$ si deduce che $2x^3 + \sin x - x \approx 2x^3$ [**attenzione**: in questo caso questa deduzione è **sbagliata**!!], e quindi
$$\frac{2x^3 + \sin x - x}{x^4 - 3x^3} \approx \frac{2x^3 + x - x}{x^4-3x^3} = \frac{2x^3}{x^3(x-3)} \to \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\,.$$

Abbiamo usato in tutti e due i casi lo stesso procedimento: ma esso non è corretto in generale! Infatti nel secondo caso il risultato è sbagliato.
Vediamo di capire meglio: come abbiamo già detto, il simbolo $A \approx B$ significa che il limite del rapporto fra A e B è 1. Nel caso a. abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \sin x - x}{2x^2} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^2}\,,$$

e quindi il limite del rapporto risulta uguale a 1 se e solo se $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^2} = 0$ [e questo è vero, ma nell'usare questo procedimento non si sta tenendo conto di questo aspetto! Qui sta il colpo di fortuna: sto usando un procedimento che non garantisce il risultato esatto, come stiamo vedendo per l'esempio b., ma mi va bene lo stesso...]
Nel caso b. si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + \sin x - x}{2x^3} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3}\,,$$

e il limite del rapporto risulta uguale a 1 se e solo se $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = 0$. Questo però non è vero, dato che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = -\frac{1}{12}$ [avremo modo di vederlo in seguito... Ma chi sa la regola dell'Hopital lo faccia!!].

4. Qual è la ragione dell'errore? Si è usato allegramente il simbolo $\approx$, al di là del suo significato. All'interno del limite di un prodotto $f(x)g(x)$, se sappiamo che $f(x) \approx h(x)$ possiamo calcolare $\lim[h(x)g(x)]$ invece che $\lim[f(x)g(x)]$; infatti

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim\left[\frac{f(x)}{h(x)}h(x)g(x)\right] = \lim \frac{f(x)}{h(x)} \lim[h(x)g(x)] = \lim[h(x)g(x)]\,,$$

poiché $f(x) \approx h(x)$ significa $\lim \frac{f(x)}{h(x)} = 1$. [Si noti che il considerare $h(x)g(x)$ invece che $f(x)g(x)$ è sempre lecito, sia quando $\lim[h(x)g(x)] = L \in \mathbf{R}$, sia quando $\lim[h(x)g(x)] = +\infty$, sia quando $\lim[h(x)g(x)] = -\infty$, sia quando non esiste il limite di $h(x)g(x)$...]
Invece, all'interno del limite di una somma questo modo di ragionare non è giustificato: se $f(x) \approx h(x)$ **non è detto** che $f(x) + g(x) \approx h(x) + g(x)$. Infatti, questo vorrebbe dire che $\lim \frac{f(x)+g(x)}{h(x)+g(x)} = 1$, mentre si ha

$$\begin{aligned}\lim \frac{f(x) + g(x)}{h(x) + g(x)} &= \lim \frac{f(x)(1 + \frac{g(x)}{f(x)})}{h(x)(1 + \frac{g(x)}{h(x)})} = \lim \frac{f(x)}{h(x)} \lim \frac{1 + \frac{g(x)}{f(x)}}{1 + \frac{g(x)}{h(x)}} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{g(x)}{f(x)}}{1 + \frac{g(x)}{h(x)}}\,,\end{aligned}$$

(poiché $\lim \frac{f(x)}{h(x)} = 1$), e non è sempre vero che il risultato sia uguale a 1 (come mostra l'esempio b. appena visto: in quel caso $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x^3 - x$, $h(x) = x$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{g(x)}{f(x)}}{1 + \frac{g(x)}{h(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + \sin x - x}{2x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + \sin x - x}{2x^3} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}...)$$

5. Riassunto finale: se $f(x) \approx h(x)$, **è corretto** dire che sicuramente $f(x)g(x) \approx h(x)g(x)$, mentre **non è corretto** dire che sicuramente$f(x) + g(x) \approx h(x) + g(x)$ [in qualche caso lo sarà, in altri non lo è: dipende dalle specifiche funzioni f, g, h].