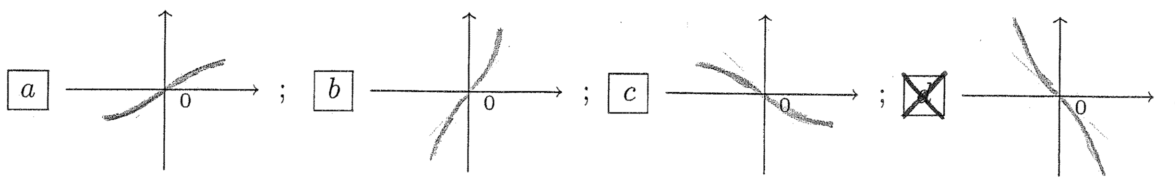
CALCOLO 1		5 gennaio 2007
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia $f(x) = \int_0^x \frac{2}{3t^4-2}\,dt$. Allora il grafico di $f(x)$ vicino all'origine è:



2. Sia $g(y) = \log(1+y)$ e $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$. Allora la retta tangente al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ in $(0, g(f(0)))$ è data da: $\boxed{a}$ $y = \frac{x}{2}$; $\boxed{b}$ $y = x - 1$; $\boxed{c}$ $y = x$; $\boxed{d}$ $y = 2x$.

3. Le soluzioni diverse da 0 dell'equazione $z - \mathrm{Im}z = -\bar{z}$ sono: $\boxed{a}$ infiniti numeri complessi (non reali e non immaginari); $\boxed{b}$ nessuna; $\boxed{c}$ infiniti numeri immaginari; $\boxed{d}$ infiniti numeri reali.

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Allora $\int_0^1 x\, f(1+x^2)\,dx =$ $\boxed{a}$ $\int_0^2 f(t)\,dt$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)\,dt$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\,dt$; $\boxed{d}$ $2\int_1^2 f(t)\,dt$.

5. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) di $\cos(\log(1+2x))$ è: $\boxed{a}$ $2x - 2x^2$; $\boxed{b}$ $1 + 2x + 2x^2$; $\boxed{c}$ $1 - 2x^2$; $\boxed{d}$ $2x - x^2$.

6. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{\pi - 2x}$ è uguale a: $\boxed{a}$ $1/2$; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ 2; $\boxed{d}$ 1.

7. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ e $b_n = \frac{1}{n} + a_n$, allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$; $\boxed{b}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente; $\boxed{c}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a $+\infty$; $\boxed{d}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a $-\infty$.

8. L'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log(1+\frac{1}{n})}$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\alpha < 1$; $\boxed{b}$ $\alpha > 0$; $\boxed{c}$ $\alpha > 2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 1$.

CALCOLO I	5 gennaio 2007

1. (6 punti)
Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^2)+\cos(2x)-1}{x^4}.$$

Usando lo sviluppo di Taylor delle funzioni

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad e$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 1 + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^4 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = -\frac{1}{3}$$

2. (6 punti) Si calcoli l'integrale

$$\int_1^2 \frac{e^x + 2e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx\ .$$

Facciamo il cambiamento di variabile $e^x = t$; $e^x dx = dt$

$dx = \frac{dt}{t}$

$$\int_e^{e^2} \frac{t+2t^3}{t^2-1}\,\frac{dt}{t} = \int_e^{e^2} \frac{1+2t^2}{t^2-1}\,dt = \int_e^{e^2} \frac{2(t^2-1)+3}{t^2-1}\,dt$$

$$= \int_e^{e^2}\left(2+\frac{3}{t^2-1}\right)dt = \int_e^{e^2}\left(2+\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}\right)dt =$$

$A(t-1)+B(t+1)=3$

$(A+B)t+(B-A)=3$ $\qquad \begin{cases} A+B=0 \\ B-A=3 \end{cases}$ $\quad 2B=3 \quad B=\frac{3}{2} \quad A=-\frac{3}{2}$

$$= \int_e^{e^2}\left(2-\frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{t-1}\right)dt = \left(2t-\frac{3}{2}\log|t+1|+\frac{3}{2}\log|t-1|\right)\Big|_e^{e^2}$$

$$= \left(2t+\frac{3}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_e^{e^2} = 2e(e-1)+\frac{3}{2}\left(\log\frac{e^2-1}{e^2+1}-\log\frac{e-1}{e+1}\right)$$

$$= 2e(e-1)+\frac{3}{2}\log\frac{(e^2-1)(e+1)}{(e^2+1)(e-1)} = 2e(e-1)+\frac{3}{2}\log\frac{(e+1)^2}{e^2+1}$$

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Soluzione particolare: $\tilde{y}(x) = \alpha\,\mathrm{sen}(2x) + \beta\cos(2x)$

$\tilde{y}'(x) = 2\alpha\cos(2x) - 2\beta\,\mathrm{sen}(2x)$; $\tilde{y}''(x) = -4\alpha\,\mathrm{sen}(2x) - 4\beta\cos(2x)$

$-4\alpha\,\mathrm{sen}(2x) - 4\beta\cos(2x) - 2\alpha\cos(2x) + 2\beta\,\mathrm{sen}(2x) - 2\alpha\,\mathrm{sen}(2x) - 2\beta\cos(2x) = \cos(2x)$

$(-4\alpha + 2\beta - 2\alpha)\,\mathrm{sen}(2x) + (-4\beta - 2\alpha - 2\beta)\cos(2x) = \cos(2x)$

$\begin{matrix} -6\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha - 6\beta = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -18\alpha + 6\beta = 0 \\ -2\alpha - 6\beta = 1 \end{matrix} \qquad -20\alpha = 1 \quad \alpha = \frac{-1}{20};\ \beta = 3\alpha = \frac{-3}{20}$

$\tilde{y}(x) = \frac{-1}{20}\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$

Soluzione generale dell'equazione omogenea: $z(x)$

Equazione caratteristica $r^2 - r - 2 = 0 \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$z(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

Soluzione generale dell'equazione differenziale

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{20}\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{20} = 1$

$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{3}{10}\,\mathrm{sen}(2x)$

$y'(0) = 2c_1 - c_2 - \frac{1}{10} = 0$

$3c_1 - \frac{5}{20} = 1$; $\quad 3c_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $\quad c_1 = \frac{5}{12}$;

$c_2 = 2c_1 - \frac{1}{10} = \frac{5}{6} - \frac{1}{10} = \frac{25-3}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

Soluzione del problema di Cauchy

$y(x) = \frac{5}{12} e^{2x} + \frac{11}{15} e^{-x} - \frac{1}{20}\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$