COGNOME [   ] NOME [   ] Matr. [   ]

Analisi Matematica II (EA)

10 gennaio 2013

Esercizio 1 (7 punti) Per ogni $\gamma \in \mathbf{R}$ si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x - \gamma y, x + \gamma y)$.
(i) Si determini il valore di γ per cui l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ sull'ellisse di semiassi 3 (rispetto a x) e 2 (rispetto a y) risulta nullo.
(ii) Per quel valore di γ, il campo vettoriale $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbf{R}^2$? In caso affermativo, determinarne un potenziale.

Risultati: $\boxed{\gamma = -1.}$ $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.}$

Calcoli:

(i) L'ellisse ha parametrizzazione $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$.
Dunque si ha ($d\vec{\ell} = (-3\operatorname{sen} t, 2\cos t)\,dt$ ...)

$$\int_0^{2\pi} (3\cos t - \gamma 2\operatorname{sen} t, 3\cos t + \gamma 2\operatorname{sen} t) \bullet (-3\operatorname{sen} t, 2\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-9\operatorname{sen} t\cos t + 6\gamma\operatorname{sen}^2 t + 6\cos^2 t + 4\gamma\operatorname{sen} t\cos t)\,dt =$$

$$= \pi(+6\gamma + 6).$$

$$\left[\begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\cos t\,dt = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \pi \end{array}\right.$$

Quindi si deve scegliere $\gamma = -1$.

(ii) Il campo vettoriale diventa $(x+y, x-y)$.
Siccome $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, il campo è irrotazionale. Siccome l'insieme di definizione è $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, il campo è conservativo.

Per trovare un potenziale, si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x + y \Rightarrow \varphi(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + xy + k(y).$$

Poi si deve imporre

$$x - y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + k' \Rightarrow k'(y) = -y \Rightarrow k(y) = -\frac{y^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 (8 punti) Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = zy + zx$, e si stabilisca di che tipo sono. Si determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme $Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4, z \leq 0\}$.

Risultati:	$\{x=-y,\ z=0\}$. Sono punti di sella.	$MAX = 4(9+\sqrt{33})^{3/2}/(1+\sqrt{33})^2 \approx 4.97852$ $MIN = -MAX$.

Calcoli:

Si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$, per cui $\nabla f = 0$ per $z=0$ e $x=-y$ (una <u>retta</u> di punti stazionari).

Poi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 1$,

e dunque la matrice hessiana è

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Siccome c'è uno 0 sulla diagonale di una riga non tutta nulla, i punti sono tutti di <u>sella</u>.

1° modo: Non ci sono punti stazionari <u>interni</u> a Q. Il bordo di Q è dato da due superfici: quella con $z=0$ e quella con $x^2+y^2+(z+1)^2=4$. Sulla prima si ha $f(x,y,z)=0$ sempre. Per vedere i punti di massimo e minimo su $x^2+y^2+(z+1)^2=4$ usiamo i moltiplicatori di Lagrange. Si ha

$$\begin{cases} z - 2\lambda x = 0 \\ z - 2\lambda y = 0 \\ x+y-2\lambda(z+1) = 0 \\ x^2+y^2+(z+1)^2 = 4 \end{cases}$$

$\rightarrow 2\lambda(x-y) = 0$

$\nearrow \lambda = 0 \rightarrow z = 0,\ x=-y \rightarrow 2x^2 = 3,\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

[Su questi punti f vale 0]

$\searrow x=y \rightarrow 2x = 2\lambda(z+1) = 2\lambda(2\lambda x+1)$.

Dunque $x = 2\lambda^2 x + \lambda$, $x = \lambda/(1-2\lambda^2)$, $y = \lambda/(1-2\lambda^2)$,

$$z = 2\lambda \frac{\lambda}{1-2\lambda^2} = -1 + \frac{1}{1-2\lambda^2}.$$

Inserendo i valori di x, y e z nell'ultima equazione viene

$$\frac{\lambda^2}{(1-2\lambda^2)^2} + \frac{\lambda^2}{(1-2\lambda^2)^2} + \frac{1}{(1-2\lambda^2)^2} = 4 \Rightarrow 2\lambda^2+1 = 4(1+4\lambda^4-4\lambda^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\lambda^4 - 18\lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9 \mp \sqrt{33}}{16} \Rightarrow \hat{z} = \frac{2\lambda^2}{1-2\lambda^2} = \frac{9 \mp \sqrt{33}}{-1 \pm \sqrt{33}}$$

$\frac{9-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-1} > 0$ NO

$-\frac{9+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}} < 0$. SI

[Si ricordi che deve essere $z \leq 0$.]

Quindi si ha $\lambda = \pm\frac{(9+\sqrt{33})^{1/2}}{4}$, $\hat{x} = \hat{y} = \mp\frac{2(9+\sqrt{33})^{1/2}}{1+\sqrt{33}}$ e

$$f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = (\hat{x}+\hat{y})\hat{z} = \mp 4\frac{(9+\sqrt{33})^{1/2}}{1+\sqrt{33}}\left(-\frac{9+\sqrt{33}}{1+\sqrt{33}}\right) = \pm 4\frac{(9+\sqrt{33})^{3/2}}{(1+\sqrt{33})^2} \approx \pm 4.97852.$$

Il valore >0 è il massimo, il valore <0 è il minimo.

Esercizio 2 (8 punti) Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione $f(x, y, z) = zy + zx$, e si stabilisca di che tipo sono. Si determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nell'insieme $Q = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4, z \leq 0\}$.

Risultati:

Calcoli:

<u>2° modo</u>. Non ci sono punti stazionari <u>interni</u> a Q, e sulla superficie di bordo con $z=0$ si ha $f=0$. Dunque occupiamoci solo della superficie $x^2+y^2+(z+1)^2=4$ con $z<0$. Possiamo esprimerla tramite coordinate sferiche $x = 2\sin\varphi\cos\theta$, $y = 2\sin\varphi\,\text{sen}\,\theta$, $z=-1+2\cos\varphi$, con $\theta\in[0,2\pi]$ e $\varphi\in[\pi/3,\pi]$ (per avere $z=-1+2\cos\varphi\leq 0$).

Calcolando f in queste coordinate si ha

$$F(\theta,\varphi) = (-1+2\cos\varphi)\,2\sin\varphi\,(\cos\theta+\sin\theta).$$

$[2\sin\varphi\cos\varphi = \sin(2\varphi)$

$\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$

Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = (-1+2\cos\varphi)\,2\sin\varphi\,(-\text{sen}\,\theta+\cos\theta), \quad \frac{\partial F}{\partial\varphi} = 2(\cos\theta+\sin\theta)(-\cos\varphi+2\cos(2\varphi)) =$$

$$= 2(\cos\theta+\sin\theta)(4\cos^2\varphi-\cos\varphi-2).$$

La derivata $\frac{\partial F}{\partial\theta}$ si annulla per $\text{sen}\,\theta=\cos\theta$ (cioè $\theta=\pi/4$ e $\theta=5\pi/4$) e per $\varphi=\pi/3$ e $\varphi=\pi$ (che danno $z=0$ e $x=y=0$, cioè sempre $f=0$).

Per $\theta=\pi/4$ e per $\theta=\frac{5\pi}{4}$ la derivata $\frac{\partial F}{\partial\varphi}$ si annulla per $4\cos^2\varphi-\cos\varphi-2=0$, cioè

$$\cos\varphi = \frac{1\mp\sqrt{33}}{8}$$ (ma la soluzione con segno + dà $\cos\varphi>1/2$, ed è da scartare).

Dunque abbiamo trovato $\theta=\pi/4$, che dà $\cos\theta=\text{sen}\,\theta=\frac{\sqrt2}{2}$, e $\theta=\frac{5\pi}{4}$ (che dà $\cos\theta=\text{sen}\,\theta=-\frac{\sqrt2}{2}$) e $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{33}-1}{8}$.

A questi valori corrispondono i punti

$$\left(\pm\frac14\sqrt{15+\sqrt{33}},\ \pm\frac14\sqrt{15+\sqrt{33}},\ -\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$$

[che, razionalizzando, corrispondono a quelli trovati con il 1° metodo ...], e i valori di f sono $\mp\frac18\sqrt{15+\sqrt{33}}\,(3+\sqrt{33})\approx\mp 4.97852$.

[Andrebbe anche valutato cosa succede sul bordo $\theta=0$ e $\theta=2\pi$, ma, siccome $\frac{\partial F}{\partial\theta}$ non si annulla per θ vicino a 0 e per θ vicino a 2π, questo controllo non è necessario ...]. Il valore massimo è quello positivo, il valore minimo è quello negativo.

Esercizio 3 (7 punti) Sia $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \sin(\pi y), 0 \leq y \leq 1\}$ e sia D_2 l'insieme del piano espresso in coordinate polari da $0 \leq \rho \leq \sin\theta$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Si calcoli $\iint_D x\,dxdy$, ove $D = D_1 \cup D_2$.

Risultato: $\boxed{\iint_D x\,dx\,dy = 1/6 .}$

Calcoli:

Si ha :

coordinate polari nel 2° integrale

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_1} x\,dx\,dy + \iint_{D_2} x\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sin(\pi y)} x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} \rho^2 \cos\theta\,d\rho =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi y)}{2}\,dy + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^3\theta}{3} \cos\theta\,d\theta = \begin{bmatrix} \pi y = t \\ dy = \frac{1}{\pi}dt \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin^2 t \,\frac{1}{\pi}\,dt + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} \sin^4\theta \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \qquad \hookrightarrow \int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \pi/2 \text{ , per parti.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{12}(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} .$$

Esercizio 4 (8 punti) Sia $K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x-2z)^2 + (y-z)^2 \leq 1+z, z \in [0,1]\}$. Si determini il valore del parametro $\delta \in \mathbf{R}$ per cui $\iiint_K (x+\delta z)\, dxdydz = 0$.

Risultato: $\boxed{\delta = -2.}$

Calcoli:

Per $z \in [0,1]$ fissato, lo strato corrispondente è il cerchio di centro $(2z, z)$ e raggio $\sqrt{1+z}$. Dunque l'integrazione per strati è la più indicata. Chiamiamo $C(z)$ quel cerchio.

Si ha:

$$\begin{cases} x = 2z + \rho\cos\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = z + \rho \,\mathrm{sen}\,\theta, & \rho \in [0, \sqrt{1+z}] \end{cases}$$

Lo jacobiano è ρ.

$$\iiint_K (x+\delta z)\,dxdydz = \int_0^1 dz \iint_{C(z)} (x+\delta z)\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1+z}} (2z + \rho\cos\theta + \delta z)\,\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[(2+\delta) z \frac{(\sqrt{1+z})^2}{2} + \cos\theta \frac{(1+z)^{3/2}}{3} \right] =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$= 2\pi(2+\delta)\frac{1}{2}\int_0^1 z(1+z)\,dz = \pi(2+\delta)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}\pi(2+\delta).$$

Bisogna dunque scegliere $\delta = -2$.