ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	10 gennaio 2018

1. (6 punti) Si determini il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse y la regione $A = \left\{(x,y) \mid \frac{3}{2} \le x \le 3, 0 \le y \le \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right\}$.

Il volume di rotazione attorno all'asse y si ottiene dalla formula

$$V = 2\pi \int_{3/2}^{3} x \, \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \, dx = 2\pi \int_{3/2}^{3} \sqrt{9-x^2} \, dx .$$

Ponendo $x = 3 \,\text{sen}\, t$, da cui $dx = 3\cos t \, dt$, $x = 3/2 \to \text{sen}\, t = 1/2 \to t = \pi/6$, $x = 3 \to \text{sen}\, t = 1 \to t = \pi/2$, si ha

$\sqrt{1-\text{sen}^2 t} = |\cos t|$, perché $\sqrt{x^2} = |x|$!!

$$V = 2\pi \int_{3/2}^{3} \sqrt{9-x^2} \, dx = 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2 t} \; 3\cos t \, dt = 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} 3|\cos t| 3\cos t \, dt =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \cos t \ge 0 \text{ per } t \in [\pi/6, \pi/2]}}{=} 18\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt.$$

L'integrale di $\cos^2 t$ si può fare per parti:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \sin t \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \sin t \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \, dt,$$

da cui

$$2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = (\sin t \cos t + t) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = +\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

Quindi

$$V = 18\pi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 3\pi^2 - 9\sqrt{3}\,\frac{\pi}{4} .$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	10 gennaio 2018

2. (6 punti) Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x^2)+x\tan(\sin(2x))}{\tan(3x^2)\left(1-e^{\frac{x^2}{2}}\right)}$$

Conosciamo gli sviluppi (per $t\approx 0$, $w\approx 0$, $v\approx 0$, $s\approx 0$)

$$\log(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad ; \quad \tan w = w+\frac{w^3}{3}+o(w^4) \ ;$$

$$\sin v = v-\frac{v^3}{6}+o(v^4) \quad ; \quad e^s = 1+s+o(s).$$

Quindi

$$t=-2x^2 \ \longrightarrow\ \log(1-2x^2) = -2x^2-\frac{(-2x^2)^2}{2}+o(x^4) = -2x^2-2x^4+o(x^4)$$

$$v=2x \ \longrightarrow\ \sin(2x) = 2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^4) = 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^4)$$

$$w=3x^2 \ \longrightarrow\ \tan(3x^2) = 3x^2+\frac{(3x^2)^3}{3}+o(x^8) = 3x^2+o(x^5)$$

$$s=x^2/2 \ \longrightarrow\ 1-e^{x^2/2} = 1-\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -x^2/2+o(x^2).$$

Ancora, con $w=\sin(2x)$:

$$\tan(\sin(2x)) = \sin(2x)+\frac{(\sin(2x))^3}{3}+o(x^4) =$$

$$= 2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}\left(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^4)\right)^3+o(x^4) = \qquad -\frac{4}{3}x^3+o(x^4)=o(x^2)$$

$$= 2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}\left(2x+o(x^2)\right)^3+o(x^4) =$$

$$= 2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}8x^3+o(x^4) = 2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^4).$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x^2)+x\tan(\sin(2x))}{\tan(3x^2)(1-e^{x^2/2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{-2x^2}-2x^4+x\left(\cancel{2x}+\frac{4}{3}x^3\right)+o(x^4)}{(3x^2+o(x^5))\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2/3\,x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = \frac{-2/3}{-3/2} = \frac{4}{9}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	10 gennaio 2018

3. (6 punti) (i) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2(y^2 - y - 6) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

(ii) Qual è la soluzione con dato di Cauchy $y(0) = 3$?

(i) È un'equazione nonlineare del 1º ordine a variabili separabili. Si ha, scrivendo $y' = \frac{dy}{dx}$, moltiplicando per dx e dividendo per y^2-y-6:

$$\frac{dy}{y^2-y-6} = x^2 dx \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2-y-6} = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c\,.$$

Il polinomio y^2-y-6 ha radici 3 e -2, quindi per trovare la primitiva si devono trovare A e B per cui $A/_{y-3} + B/_{y+2} = \frac{1}{y^2-y-6}$.

Questo richiede

$$A(y+2) + B(y-3) = (A+B)y + 2A - 3B = 1,$$

dunque $A+B=0$ e $2A-3B=1$, che dà $A=-B$, $-5B=1$, $B=-1/5$, $A=1/5$.

Quindi

$$\int \frac{dy}{y^2-y-6} = \int \left(\frac{1}{5}\frac{1}{y-3} - \frac{1}{5}\frac{1}{y+2}\right) dy = \frac{1}{5}\log\frac{|y-3|}{|y+2|} = \frac{x^3}{3} + c\,.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ha $|y(0)-3| = |1-3| = |-2|$, $|y(0)+2| = |1+2| = |3|$, per cui si ottiene (dato che per $x \approx 0$ $y(x)-3<0$, $y(x)+2>0$)

$$\frac{1}{5}\log\frac{2}{3} = c \longrightarrow \frac{1}{5}\log\frac{3-y}{y+2} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}\log\frac{2}{3}\,.$$

Di conseguenza

$$\log\frac{3-y}{y+2} = \frac{5x^3}{3} + \log\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{3-y}{y+2} = e^{5x^3/3}\,\frac{2}{3} \longrightarrow (9-3y) = 2(y+2)e^{5x^3/3} \rightarrow$$

$$\rightarrow (2e^{5x^3/3} + 3)y = -4e^{5x^3/3} + 9 \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{9-4e^{5x^3/3}}{3+2e^{5x^3/3}}}\,.$$

(ii) Il termine y^2-y-6 si annulla per $y=3$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy per $y(0)=3$ è semplicemente $y(x)=3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (per cui, ovviamente, $y'=0$, e dunque l'equazione è soddisfatta).