COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Analisi Matematica II (EA)

10 luglio 2013

Esercizio 1 (8 punti) Sia $\vec{\alpha}$ la curva ottenuta intersecando le superfici $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2=4\}$ e $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 2-x^2\}$, e sia $\vec{v}$ il campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z) = (x-y, x-y, z)$. Si calcoli $\int_\alpha \vec{v} \cdot d\vec{l}$.

Risultato: $\int_\alpha \vec{v} \cdot d\vec{l} = \pm 8\pi$ (a seconda del verso di percorrenza)

Calcoli:

Una parametrizzazione di $\vec{\alpha}$ è $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$ (che dà $x^2+y^2=4$) e $z = 2-4\cos^2\theta$ (che dà $z=2-x^2$), con $\theta \in [0,2\pi]$.

Quindi $\alpha'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, +8\cos\theta\sin\theta)$, e l'integrale richiesto è (a meno del segno, non essendo stato fissato il verso di percorrenza...)

$$\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - 2\sin\theta, 2\cos\theta - 2\sin\theta, 2-4\cos^2\theta)\cdot(-2\sin\theta, 2\cos\theta, 8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-4\cos\theta\sin\theta + \underbrace{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}_{=4} - 4\sin\theta\cos\theta + 16\cos\theta\sin\theta - 32\cos^3\theta\sin\theta\Big)d\theta =$$

$$= 8\pi + \int_0^{2\pi} \underbrace{8\cos\theta\sin\theta}_{=4\sin(2\theta)}\,d\theta - \int_0^{2\pi} 32\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= 8\pi - 2\cos(2\theta)\Big|_0^{2\pi} + 32\,\frac{1}{4}\cos^4\theta\Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

[Questo è il valore dell'integrale *se* si percorre la curva $\vec{\alpha}$ lasciando a sinistra l'interno del cilindro $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4\}$.]

Esercizio 2 (7 punti) Si determini il polinomio di secondo grado $P(x) = a+bx+cx^2$ che nell'intervallo [-1,1] ha distanza minima da $F(x) = x^3 - x$ (cioè, si determinino i valori dei coefficienti a, b, c per cui $P(x) = a + bx + cx^2$ minimizza $\int_{-1}^{1}[P(x) - F(x)]^2 dx$).

Risultato: $P(x) = -\frac{2}{5}x$.

Calcoli:

Si vuole minimizzare $\int_{-1}^{1} [a+bx+cx^2-x^3+x]^2 dx$, al variare di $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

La teoria presentata garantisce che basta annullare il gradiente rispetto ad a, b, c. Dunque

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{-1}^{1}[a+bx+cx^2-x^3+x]^2 dx = 2\int_{-1}^{1}[a+bx+cx^2-x^3+x]dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_{-1}^{1}[a+bx+cx^2-x^3+x]^2 dx = 2\int_{-1}^{1}[a+bx+cx^2-x^3+x]x\,dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_{-1}^{1}[a+bx+cx^2-x^3+x]^2 dx = 2\int_{-1}^{1}[a+bx+cx^2-x^3+x]x^2 dx = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} 2a + \frac{2}{3}c = 0 & \Rightarrow c = -3a \\ \frac{2}{3}(b+1) - \frac{2}{5} = 0 & \Rightarrow b = -2/5 \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c = 0 & \Rightarrow \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow c = 0. \end{cases}$$

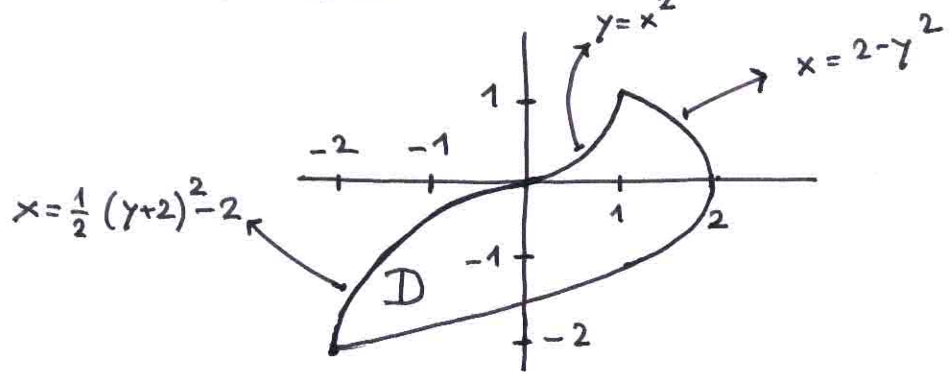
Il polinomio è quindi dato da

$$P(x) = -\frac{2}{5}x.$$

Esercizio 3 (7 punti) Si considerino le tre parabole $p_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y = x^2, 0 \le x \le 1\}$, $p_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x = 2 - y^2, -2 \le y \le 1\}$, $p_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x = \frac{1}{2}y^2 + 2y, -2 \le y \le 0\}$, e sia D l'insieme piano racchiuso da p_1, p_2 e p_3. Si calcoli l'area di D.

Risultato: $\boxed{\text{area}(D) = 5.}$

Calcoli: Un disegno può aiutare!



$$\left[\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}y^2 + 2y = \\ &= \tfrac{1}{2}(y+2)^2 - 2 \end{aligned}\right.$$

Possiamo dunque calcolare l'area di D usando il teorema di Green, con le curve $\vec{\alpha}_1(x) = (x, x^2)$, $x \in [0,1]$ (che ha verso di percorrenza "negativo"), $\vec{\alpha}_2(y) = (2-y^2, y)$, $y \in [-2,1]$, $\vec{\alpha}_3(y) = (\frac{1}{2}y^2 + 2y, y)$, $y \in [-2, 0]$ (che ha verso di percorrenza negativo). Dunque

$$\text{area}(D) = -\frac{1}{2}\int_{\alpha_1} (-y, x) \cdot d\vec{\ell} + \frac{1}{2}\int_{\alpha_2} (-y, x) \cdot d\vec{\ell} - \frac{1}{2}\int_{\alpha_3} (-y, x) \cdot d\vec{\ell} =$$

$$\left[\begin{aligned} \vec{\alpha}_1'(x) &= (1, 2x) \\ \vec{\alpha}_2'(y) &= (-2y, 1) \\ \vec{\alpha}_3'(y) &= (y+2, 1) \end{aligned}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-x^2, x) \cdot (1, 2x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} (-y, 2-y^2) \cdot (-2y, 1)\, dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \left(-y, \frac{1}{2}y^2 + 2y\right) \cdot (y+2, 1)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} (y^2 + 2)\, dy - \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3\Big|_{-2}^{1} + 6\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}y^3\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= -\cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{4}{3} + 3 + \frac{2}{3} = 5.$$

Non usando il teorema di Green si può calcolare l'area come:

$$\text{area}(D) = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y^2} dx + \int_{-2}^{0} dy \int_{\frac{1}{2}y^2 + 2y}^{2-y^2} dx = \int_0^1 (2 - y^2 - \sqrt{y})\, dy + \int_{-2}^{0} \left(2 - \frac{3}{2}y^2 - 2y\right) dy = 5.$$

Esercizio 4 (8 punti) Siano dati gli insiemi

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \le 1, x \ge 1\} \quad , \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x,y) \in A, 0 \le z \le 1\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Si calcoli il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso la superficie **laterale** dell'insieme C.

Risultato: $\displaystyle\iint_{S_C} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \pi.$

Calcoli:

Il bordo di C è dato dalla superficie laterale, dalla "base" a quota $z=0$ e dal "tetto" a quota $z=1$. L'insieme A è metà del cerchio di raggio 1 e centro $(1,0)$. Sulla "base" (che è A), si ha $\vec{n} = (0,0,-1)$. Sul "tetto" si ha $\vec{n} = (0,0,1)$ (sono due normali "uscenti"!).

Dal teorema della divergenza si ha (S_C è la superficie laterale di C)

$$\iint_{S_C} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_C \operatorname{div}\vec{F}\, dx\,dy\,dz - \iint_A \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS - \iint_{\text{"tetto"}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS.$$

Sulla base A si ha $\vec{F} = (x,y,0)$, per cui $\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$.

Sul "tetto" si ha $\vec{F} = (x,y,1)$, per cui $\vec{F}\cdot\vec{n} = 1$.

Infine $\operatorname{div}\vec{F} = 3$, per cui

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_C 3\, dx\,dy\,dz - \iint_A 0\, dS - \iint_{\text{tetto}} 1\, dS = 3\, \mathrm{vol}(C) - \underbrace{\text{area (tetto)}}_{=\ \text{area}(A)} =$$

$$= 3\, \underbrace{\text{area}(A)}_{\text{base di } C} \cdot \underbrace{1}_{\text{altezza di } C} - \text{area}(A) = 2\, \underbrace{\text{area}(A)}_{\text{area di metà cerchio di raggio 1...}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi.$$

Non usando il teorema della divergenza, S_C è fatta di due pezzi: $S_1 = \{(1+\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) \,|\, \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z \in [0,1]\}$ e $S_2 = \{(1,y,z) \,|\, y \in [-1,1], z \in [0,1]\}$. La normale uscente su S_1 è $\vec{n} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, su S_2 è $\vec{n} = (-1,0,0)$. Dunque

$$\iint_{S_C} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dz\, (1+\cos\theta, \sin\theta, z)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) + \int_{-1}^{1} dy \int_0^1 dz\, (1,y,z)\cdot(-1,0,0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta + 1)\, d\theta - \int_{-1}^{1} dy = \pi.$$