COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

10 luglio 2015

Esercizio 1 (7 punti) Sia $\vec{v}(x,y,z) = (z, y+x, z^2)$ e sia $\vec{\alpha}$ la curva il cui sostegno è la parabola $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = ax^2+bx+c, z=1\}$ contenuta nel piano $\{z=1\}$ e passante per i punti $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(2,1,1)$. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{l}$, con $\vec{\alpha}$ percorsa con $(0,0,1)$ come punto di partenza e $(2,1,1)$ come punto d'arrivo.

Risultato: $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{l} = 17/6$.

Calcoli:

Imponendo il passaggio per i punti si ha

$0 = c \quad , \quad 1 = a+b+c, \quad 1 = 4a+2b+c \quad ,$

da cui $b = 1-a$, e $1 = 4a + 2(1-a) = 2a+2$, cioè $a = -1/2$, $b = 3/2$, $c = 0$.

Quindi la curva si può parametrizzare come

$$\vec{\alpha}(x) = (x, -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x, 1) \quad , \quad x \in [0,2] .$$

Dunque $\vec{\alpha}'(x) = (1, -x+3/2, 0)$ e $\vec{v}(\vec{\alpha}(\vec{x})) = (1, -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + x, 1)$; allora

$$\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_0^2 \left(1, -\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x, 1\right)\cdot\left(1, -x+\frac{3}{2}, 0\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{4}x\right)dx =$$

$$= 2 + \frac{15}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{13}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 =$$

$$= 2 + \frac{15}{2} - \frac{26}{3} + 2 = \frac{12+45-52+12}{6} = \frac{17}{6} .$$

Esercizio 2 (7 punti) Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione

$$f(x, y, z) = xy + 3z^3 - xz - y\,,$$

e si stabilisca di che tipo sono.

Risultato: $\boxed{(1, 1/3, 1/3),\ \text{sella}\ ;\ (1, 1/3, -1/3),\ \text{sella}.}$

Calcoli:

Si ha $\nabla f = (y - z, x - 1, 9z^2 - x)$ e dunque si annulla per $x = 1$, $z = \pm 1/3$ e $y = \pm 1/3$. I punti stazionari dunque sono $(1, 1/3, 1/3)$ e $(1, -1/3, -1/3)$.

L' hessiano vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 18z \end{pmatrix} \begin{array}{l} \nearrow (1, 1/3, 1/3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ \searrow (1, 1/3, -1/3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Siccome in entrambi i casi c'è una riga non tutta nulla con uno 0 sulla diagonale sono entrambi due punti di sella.

Esercizio 3 (8 punti) (i) Si determini il piano tangente P al grafico di $F(x,y) = \frac{x}{1+y^2} - \frac{y^2}{1+x}$ nel punto $(2,-1,F(2,-1))$. (ii) Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto di $g(x,y,z) = z - x - y^2$ su $P \cap C$, ove C è il cilindro (a base quadrata) $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, z \in \mathbf{R}\}$.

Risultati: $\boxed{P = \left\{ z = \frac{11}{18}x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{9} \right\}}$ $\boxed{\begin{array}{l} MAX = 65/36 \text{ in } (0, 5/6, 5/2) \\ MIN = 13/18 \text{ in } (1, 0, 31/18). \end{array}}$

Calcoli:

(i) Siccome $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2} + \frac{y^2}{(1+x)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2xy}{(1+y^2)^2} - \frac{2y}{1+x}$, si ha

$\nabla F(2,-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9}, \frac{4}{4} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{11}{18}, \frac{5}{3}\right)$. Poi $F(2,-1) = \frac{2}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Dunque l'equazione del piano tangente P è

$$z = \frac{2}{3} + \left(\frac{11}{18}, \frac{5}{3}\right) \cdot (x-2, y+1) = \frac{11}{18}x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{9}.$$

(ii) Sostituendo il valore $z = \frac{11}{8}x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{9}$ in g si ottiene la nuova funzione $\varphi(x,y) = -\frac{7}{18}x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{9} - y^2$, che andrà studiata nel quadrato $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$.

Si ha $\nabla\varphi = \left(-\frac{7}{18}, \frac{5}{3} - 2y\right)$, che quindi non si annulla mai.

Il massimo ed il minimo si troveranno quindi sul bordo.

Per $x=0$ si ha $\varphi(0,y) = \frac{5}{3}y + \frac{10}{9} - y^2$, la cui derivata è $\frac{5}{3} - 2y$, che si annulla per $y = 5/6$.

Per $x=1$ si ha $\varphi(1,y) = -\frac{7}{18} + \frac{5}{3}y + \frac{10}{9} - y^2$, la cui derivata si annulla per $y = 5/6$.

Per $y=0$ si ha $\varphi(x,0) = -\frac{7}{18}x + \frac{10}{9}$, la cui derivata non si annulla.

Per $y=1$ si ha $\varphi(x,1) = -\frac{7}{18}x + \frac{5}{3} + \frac{10}{9} - 1$, la cui derivata non si annulla.

Si devono dunque paragonare i valori

$\varphi(0,0) = \frac{10}{9}$, $\varphi(0,1) = \frac{16}{9}$, $\varphi(0,5/6) = \frac{65}{36}$, $\varphi(1,0) = \frac{13}{18}$,

$\varphi(1,1) = \frac{25}{18}$, $\varphi(1,5/6) = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$,

e si ha massimo $\frac{65}{36}$ in $(0, 5/6, 5/2)$ e minimo $\frac{13}{18}$ in $\left(1, 0, \frac{31}{18}\right)$.

[Le terze coordinate si sono ottenute calcolando $z = \frac{11}{18}x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{9}$ nei rispettivi punti $(0, 5/6)$ e $(1,0)$.]

Esercizio 4 (8 punti) Date le due superfici $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2x^2 - 3y^2 + x - y + 1\}$ ed $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x^2 - 2y^2 - x - y - 2\}$, sia V l'insieme dei punti al di sotto di S_1 e al di sopra di S_2. Si calcoli il volume di V.

Risultato: $\boxed{\mathrm{vol}(V) = 8\pi.}$

Calcoli:

Intersecando le due superfici si ottiene

$$-2x^2 - 3y^2 + x - y + 1 = -x^2 - 2y^2 - x - y - 2\,,$$

cioè $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$, cioè l'equazione della circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 4$, di centro $(1,0)$ e raggio 2.

In particolare, si ha S_1 al di sopra di S_2 se $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$, ed S_2 al di sopra di S_1 se $(x-1)^2 + y^2 \geq 4$.

Dunque

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} dx\,dy \left[\int_{-x^2-2y^2-x-y-2}^{-2x^2-3y^2+x-y+1} dz\right] = \iint_{\underbrace{C((1,0),2)}_{\text{cerchio di centro }(1,0)\text{ e raggio }2}} dx\,dy\left[-x^2 - y^2 + 2x + 3\right] =$$

jacobiano!

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\left(-\rho^2\cos^2\theta - \cancel{2\rho\cos\theta} - 1 - \rho^2\sin^2\theta + 2 + \cancel{2\rho\cos\theta} + 3\right) =$$

polari:
$x = \rho\cos\theta + 1$
$y = \rho\sin\theta$
$\rho \in [0,2]$
$\theta \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (-\rho^3 + 4\rho)\, d\rho = 2\pi\left(-\frac{\rho^4}{4} + 2\rho^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\pi(-4 + 8) = 8\pi.$$