ANALISI MATEMATICA 1	10 settembre 2014

1. **(6 punti)** Si determini il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 0$ e di quarto grado della funzione

$$f(x) = \log(1 + \sin x) - \cos(3x^2)\,.$$

Conosciamo gli sviluppi

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \qquad \text{per } t \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cos w = 1 - w^2/2 + o(w^2) \qquad \text{per } w \to 0\,,$$

quindi

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + o(x^4)\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\,,$$

$$\cos(3x^2) = 1 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

In conclusione,

$$f(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{53}{12}x^4 + o(x^4)\,,$$

e $P_4(x) = -1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{53}{12}x^4$.

ANALISI MATEMATICA 1	10 settembre 2014

2. **(6 punti)** Data la funzione così definita

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x & \text{se } x \le \sqrt{3} \\ 6\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-x} & \text{se } x > \sqrt{3}\,, \end{cases}$$

determinarne i limiti per $x \to \pm\infty$, gli eventuali punti angolosi, gli eventuali valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo e i punti in cui essi sono raggiunti, gli eventuali punti di flesso. Inoltre disegnarne qualitativamente il grafico (incluso crescenza/decrescenza, convessità/concavità).

Si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 6\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3+9x) = +\infty$.
Inoltre $g(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}+9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, $\lim_{x\to\sqrt{3}^+} g(x) = 6\sqrt{3}$ e $g(x)$ risulta continua.
Poi $g(0) = 0$, $g(x)>0$ per $x>\sqrt{3}$, $g(x)=0$ per $-x^3+9x=0$, cioè, oltre a $x=0$, $-x^2+9=0$, cioè $x=-3$ ($x=+3$ è fuori dalla zona $x\le\sqrt{3}$ ove la funzione $g(x)$ è definita come $-x^3+9x$).
Si ha, per $x>\sqrt{3}$: $g'(x) = -6\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-x} < 0$, e la funzione è strettamente decrescente. Inoltre $g''(x) = +6\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-x} > 0$, per cui la funzione è strettamente convessa.
Invece, per $x\le\sqrt{3}$: $g'(x) = -3x^2+9$, che si annulla per $x=-\sqrt{3}$ e $x=\sqrt{3}$, ed è positiva per $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$. In questa zona quindi g è strettamente crescente. Inoltre $g''(x) = -6x$, che si annulla per $x=0$ (punto di flesso obliquo) ed è positiva per $x<0$, dove la funzione è strettamente convessa.
Nel punto $x=\sqrt{3}$ si ha $\lim_{x\to\sqrt{3}^+} g'(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} -6\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-x} = -6\sqrt{3}$, mentre $\lim_{x\to\sqrt{3}^-} g'(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} (-3x^2+9) = -9+9=0$. Si ha dunque un punto angoloso.
Il punto di massimo relativo è $x=\sqrt{3}$, con $g(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}+9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.
Il punto di minimo assoluto è $x=-\sqrt{3}$, con $g(-\sqrt{3}) = +3\sqrt{3}-9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$.
Non si hanno valori di massimo assoluto (dato che $g(x)\to+\infty$ per $x\to-\infty$...).

<u>Grafico</u>: nella pagina seguente.

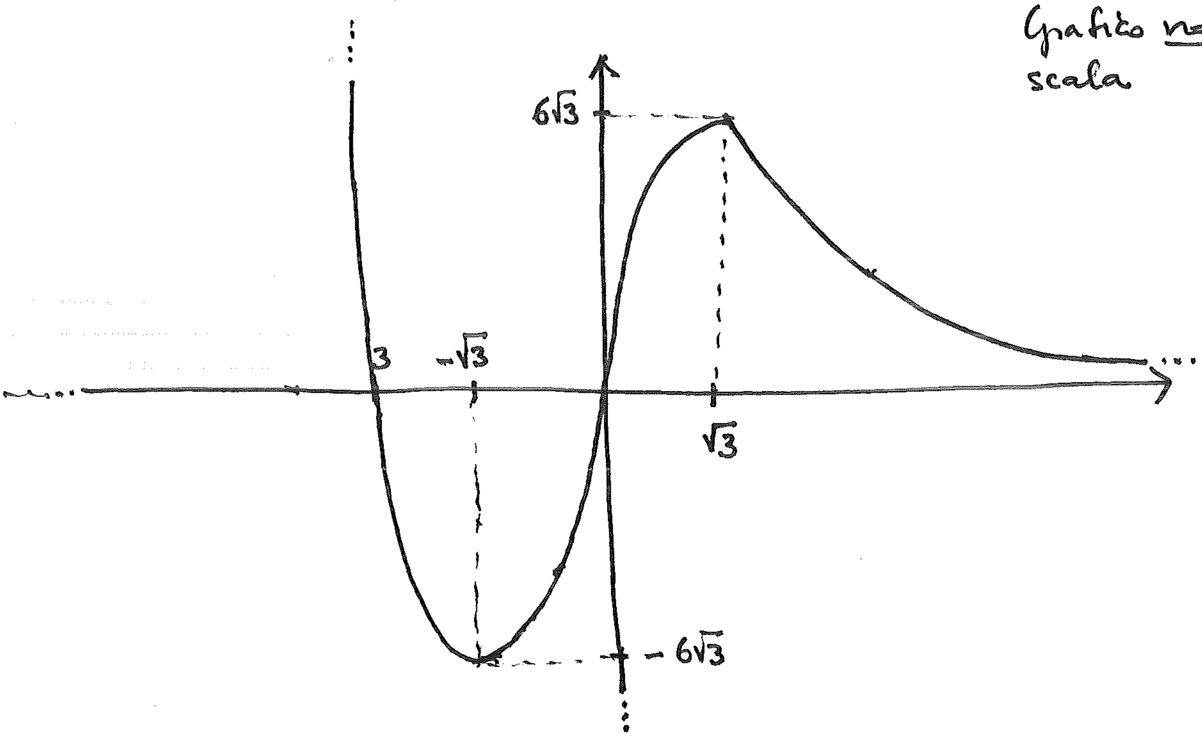
ANALISI MATEMATICA 1	10 settembre 2014

2. **(6 punti)** Data la funzione così definita

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x & \text{se } x \leq \sqrt{3} \\ 6\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-x} & \text{se } x > \sqrt{3}, \end{cases}$$

determinarne i limiti per $x \to \pm\infty$, gli eventuali punti angolosi, gli eventuali valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo e i punti in cui essi sono raggiunti, gli eventuali punti di flesso. Inoltre disegnarne qualitativamente il grafico (incluso crescenza/decrescenza, convessità/concavità).

Grafico non in scala



ANALISI MATEMATICA 1	10 settembre 2014

1. **(6 punti)** Si determini il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 0$ e di quarto grado della funzione

$$f(x) = \log(1 + \sin x) - \cos(3x^2)\,.$$

Conosciamo gli sviluppi

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cos w = 1 - w^2/2 + o(w^2) \quad \text{per } w \to 0\,,$$

quindi

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + o(x^4)\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\,,$$

$$\cos(3x^2) = 1 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

In conclusione,

$$f(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{53}{12}x^4 + o(x^4)\,,$$

e $P_4(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{53}{12}x^4\,.$