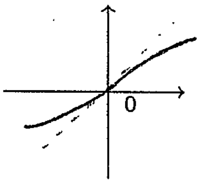
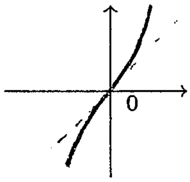
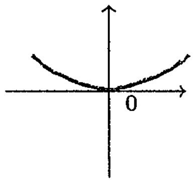
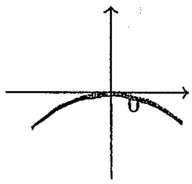
ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		11 gennaio 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Corso di laurea:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Indicate quale disegno meglio rappresenta il grafico di $F(x) = \int_0^x \frac{t}{\sin t}\, dt$.

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

2. Sia f una funzione almeno due volte derivabile in $\mathbf{R}$ e con derivata seconda continua. Se $f'(0) = f''(0) = 0$, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $x = 0$ non può essere il punto di minimo assoluto di f in $\mathbf{R}$; $\boxed{b}$ $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale di f; $\boxed{c}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$; $\boxtimes$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(0)-f(x)}{x^2} = 0$.

3. Se $y(t)$ è la soluzione di $\begin{cases} y' = y/t \\ y(1) = 1/e \end{cases}$ allora $y(2) =$ $\boxed{a}$ $1/e^2$; $\boxtimes$ $2/e$; $\boxed{c}$ $1/e$; $\boxed{d}$ 1.

4. Quale è l'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x}}\, dx$ è convergente? $\boxtimes$ $\alpha > -1$; $\boxed{b}$ $\alpha < -1$; $\boxed{c}$ $\alpha < 1$; $\boxed{d}$ l'integrale non è mai convergente.

5. $\int_1^4 f(\frac{t+1}{3})dt =$ $\boxed{a}$ $\int_{\frac{10}{3}}^{\frac{37}{3}} \frac{f(x)}{3}dx$; $\boxed{b}$ $\int_4^{13} \frac{f(x)}{3}dx$; $\boxed{c}$ $\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{7}{3}} 3f(x)dx$; $\boxtimes$ $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} 3f(x)dx$.

6. Se $a_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 3$, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?
$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+a_n) = 4$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \geq 9$; $\boxed{c}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{3}$; $\boxtimes$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ è convergente.

7.
$$\int_1^e \frac{f(1/x)}{x}\, dx =$$

$\boxed{a}$ $-\int_1^e \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxtimes$ $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{c}$ $\int_1^{\frac{1}{e}} f(t)t\, dt$; $\boxed{d}$ $\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{f(1/t)}{t}\, dt$.

8. Sia $y(t)$ la soluzione di $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = \beta. \end{cases}$ Per quali $\beta \in \mathbf{R}$ si ha $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$?
$\boxed{a}$ $\beta > -3$; $\boxed{b}$ $\beta = -3$; $\boxed{c}$ $\beta = 3$; $\boxtimes$ $\beta < -3$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	11 gennaio 2011

1. **(6 punti)** Risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2ty + t^3 + 2t, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Dite se esistono ed eventualmente trovate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.

È un'equazione lineare del 1° ordine, non omogenea. La formula risolutiva dà:

$$y(t) = e^{\int_0^t 2s\,ds}\left(\alpha + \int_0^t e^{-\int_0^w 2s\,ds}(w^3+2w)\,dw\right) = e^{t^2}\left(\alpha + \int_0^t e^{-w^2}(w^3+2w)\,dw\right)$$

Integriamo per parti (primitiva di we^{-w^2} è $-\frac{1}{2}e^{-w^2}\ldots$)

$$\int_0^t e^{-w^2}(w^3+2w)\,dw = -\frac{1}{2}e^{-w^2}(w^2+2)\Big|_{w=0}^{w=t} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-w^2}2w\,dw =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+2) + 1 - \frac{1}{2}e^{-w^2}\Big|_{w=0}^{w=t} = -\frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+2) + 1 - \frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$y(t) = e^{t^2}\left[\alpha - \frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+3) + \frac{3}{2}\right] = e^{t^2}\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}.$$

Per $t \to +\infty$ il termine dominante è $e^{t^2} \longrightarrow +\infty$. Dunque si ha sicuramente $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$ per $\alpha + 3/2 < 0$, cioè $\alpha < -3/2$.

Poi per $\alpha = -3/2$ la soluzione diventa $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}$, e anche in questo caso $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$.

[Per $\alpha > -3/2$ si ha $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.]

1. (6 punti) Risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2ty + t^3 + 2t, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Dite se esistono ed eventualmente trovate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.

È un'equazione lineare del 1° ordine, non omogenea. La formula risolutiva dà:

$$y(t) = e^{\int_0^t 2s\,ds}\left(\alpha + \int_0^t e^{-\int_0^w 2s\,ds}(w^3+2w)\,dw\right) = e^{t^2}\left(\alpha + \int_0^t e^{-w^2}(w^3+2w)\,dw\right)$$

Integriamo per parti (primitiva di we^{-w^2} è $-\frac{1}{2}e^{-w^2}$...)

$$\int_0^t e^{-w^2}(w^3+2w)\,dw = -\frac{1}{2}e^{-w^2}(w^2+2)\Big|_{w=0}^{w=t} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-w^2}\,2w\,dw =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+2) + 1 - \frac{1}{2}e^{-w^2}\Big|_{w=0}^{w=t} = -\frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+2) + 1 - \frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$y(t) = e^{t^2}\left[\alpha - \frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+3) + \frac{3}{2}\right] = e^{t^2}\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}.$$

Per $t\to+\infty$ il termine dominante è $e^{t^2}\to+\infty$. Dunque si ha sicuramente $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$ per $\alpha + 3/2 < 0$, cioè $\underline{\alpha < -3/2}$.

Poi per $\underline{\alpha = -3/2}$ la soluzione diventa $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}$, e anche in questo caso $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$.

[Per $\alpha > -3/2$ si ha $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.]

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia | 11 gennaio 2011

2. (6 punti) Sia $a > 0$ e

$$f_a(x) = |2e^x - 4| - ax, \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 4.$$

Studiate la funzione f_a e disegnatene il grafico nei due casi $a = 1$ e $a = 6$.
Per quali valori di a il punto $x = 4$ è il minimo assoluto di f_a nell'intervallo $[0, 4]$?

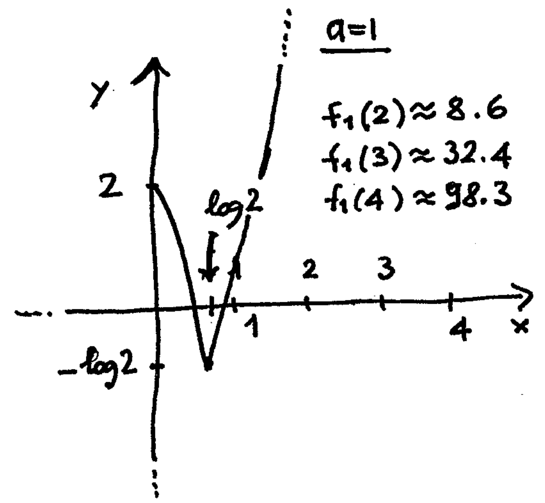
Si ha $2e^x - 4 \ge 0$ per $e^x \ge 2$, cioè $x \ge \log 2$. Dunque $f_a(x) = 2e^x - 4 - ax$ per $\log 2 \le x \le 4$; $f_a(x) = 4 - 2e^x - ax$ per $0 \le x \le \log 2$.

Si ha $f_a(0) = 4 - 2e^0 = 2$, $f_a(\log 2) = -a\log 2 < 0$, $f_a(4) = 2e^4 - 4 - 4a$.

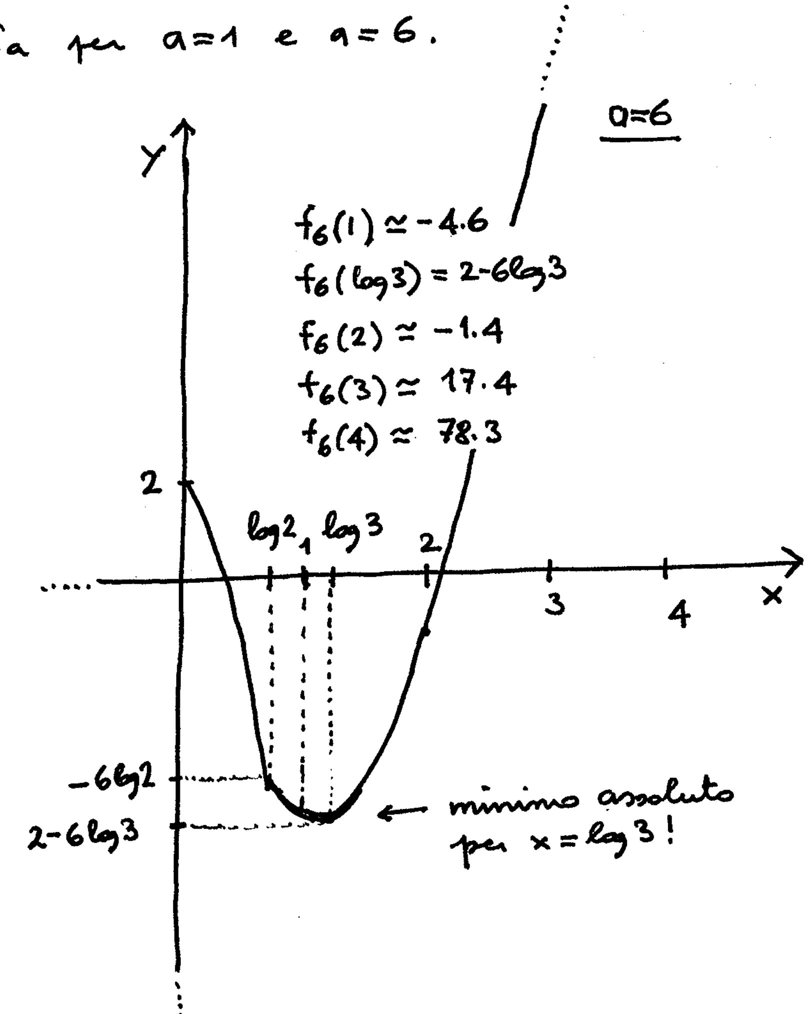
Calcoliamo la derivata prima: per $0 \le x \le \log 2$ si ha $f_a'(x) = -2e^x - a < 0$, dunque f_a è strettamente decrescente. Per $\log 2 \le x \le 4$ si ha $f_a'(x) = 2e^x - a$, e quindi f_a decresce strettamente per $x < \log(a/2)$, e cresce per $x > \log(a/2)$ <u>se</u> $\log(a/2) \le 4$, cioè $a \le 2e^4$; se invece $a > 2e^4$, allora f_a decresce per $\log 2 \le x \le 4$ (il valore $\log(a/2)$ è in questo caso > 4...).

Possiamo allora concludere che per $\underline{a \ge 2e^4}$ il punto $x = 4$ è il minimo assoluto di f_a nell'intervallo $[0,4]$ (f_a è decrescente in $[0,4]$...)

Vediamo ora i grafici di f_a per $a=1$ e $a=6$.



[Ci vorrebbe una scala molto diversa fra x e y...]



ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	11 gennaio 2011

3. (6 punti) Studiate la convergenza semplice ed assoluta della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n+2^n}.$$

Per quali valori del parametro $b > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{n+b^n}$ è convergente per $x = \frac{1}{4}$?

Calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{n+1+2^{n+1}} \cdot \frac{n+2^n}{4^n} = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n}{n+1+2^{n+1}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Quindi la serie converge semplicemente ed assolutamente per $|x| < 1/2$, e non converge per $|x| > 1/2$.

Per $x = 1/2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+2^n}$, e il termine generale tende a 1, quindi la serie è divergente (non è convergente, ↳ poiché il termine generale non tende a 0. ed è a termini positivi...).

Per $x = -1/2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n+2^n}$, e il termine generale non tende a 0, per cui la serie non è convergente.

Per $x = 1/4$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+b^n}$. Se $b>1$, la serie è asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b^n$, che è convergente (essendo $b>1$...).

Se $0<b\leq 1$, la serie è asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che è divergente.