COGNOME ____ NOME ____ Matr. ____

Analisi Matematica II (EA)

11 luglio 2012

Esercizio 1. (7 punti)
Si stabilisca per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^4+y^2z^2)^\alpha}(\alpha x^3, yz^2, y^2z)$$

è conservativo in $\mathbf{R}^3$. Per tali valori si calcoli anche un potenziale di $\mathbf{v}$.

Risultati: $\boxed{\alpha = 0 \quad e \quad \alpha = 2}$ $\boxed{\frac{1}{2}y^2z^2 + c\ ; \ -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^4+y^2z^2} + c}$

Calcoli:

Il campo è definito in $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso: dunque è sufficiente controllare che le derivate incrociate siano uguali.

Si ha

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \alpha x^3(-\alpha)\frac{2yz^2}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}} \quad , \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = yz^2(-\alpha)\frac{4x^3}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}} \Rightarrow 2\alpha^2 = 4\alpha$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \alpha x^3(-\alpha)\frac{2zy^2}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}} \quad , \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = y^2z(-\alpha)\frac{4x^3}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}} \Rightarrow 2\alpha^2 = 4\alpha$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{2yz}{(1+x^4+y^2z^2)^\alpha} + yz^2(-\alpha)\frac{2zy^2}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}} = 2yz\frac{1+x^4+y^2z^2-\alpha y^2z^2}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{2yz}{(1+x^4+y^2z^2)^\alpha} + y^2z(-\alpha)\frac{2yz^2}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}} = 2yz\frac{1+x^4+y^2z^2-\alpha y^2z^2}{(1+x^4+y^2z^2)^{\alpha+1}}.$$

Quindi il campo è irrotazionale, e dunque conservativo, per $\alpha^2 = 2\alpha$, cioè $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$.

Per $\alpha = 0$ il campo è $(0, yz^2, y^2z)$ e quindi il potenziale è $\frac{1}{2}y^2z^2 + c$.

Per $\alpha = 2$ il campo è $(1+x^4+y^2z^2)^{-2}(2x^3, yz^2, y^2z)$. Il potenziale è dato da

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{2x^3}{(1+x^4+y^2z^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^4+y^2z^2} + g(y,z).$$ Imponendo $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_2$

viene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\frac{2yz^2}{(1+x^4+y^2z^2)^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{yz^2}{(1+x^4+y^2z^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g = g(z).$$

Analogamente, imponendo $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_3$, viene $g'(z) = 0$, dunque $g(z) =$ costante. Il potenziale è quindi $\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{2}(1+x^4+y^2z^2)^{-1} + c$.

Esercizio 2. (7 punti)
Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x+y} & \text{per } x \neq -y \\ 0 & \text{per } x = -y \end{cases}.$$

Si determini se: (i) f è continua in $(0,0)$; (ii) f ha le derivate parziali in $(0,0)$ (e in caso affermativo quanto valgono); (iii) f è differenziabile in $(0,0)$.

Risultati:

NO	$\nabla f(0,0) = (0,0)$.	NO

Calcoli:

Sull'asse x la funzione vale x^2; sull'asse y la funzione vale $-y^2$.

ii) Per verificare se ha le derivate parziali in $(0,0)$ bisogna calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \ ; \ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y} = 0.$$

Quindi f ha le derivate parziali in $(0,0)$ e il gradiente vale $(0,0)$.

i) Sugli assi si ha $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$, $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$.

Il "candidato" limite di $f(x,y)$ per $(x,y)\to(0,0)$ è dunque 0. Ma è il limite? guardando l'espressione di f, si vede che il denominatore $x+y$ si annulla sulla retta $y=-x$. Se ci si avvicina a questa retta "molto velocemente", si può fare diventare molto piccolo il denominatore, senza che il numeratore diventi altrettanto piccolo: dunque il limite non dovrebbe essere 0. Scegliamo una curva che si avvicina "molto velocemente" alla retta $y=-x$: per esempio, $y=-x+x^3$ (va bene anche $y=-x+x^2$??).

Si ha $f(x,-x+x^3) = [x^3-(-x+x^3)^3]/x^3 = [2x^3+o(x^3)]/x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 2$.

In conclusione: f non ha limite per $(x,y)\to(0,0)$, e quindi non è continua.

(iii) Se f non è continua, non è differenziabile.

Esercizio 3. (8 punti)
Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $g(x, y, z) = x - y + z$ sull'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Risultato:

MAX. ASSOLUTO: $3+2\sqrt{2}$, in $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$
MIN. ASSOLUTO: $-3/2$, in $(-1/2, 1/2, -1/2)$.

Calcoli:

La funzione g calcolata su S (definito dall'equazione $z = x^2+y^2-1$) vale $h(x,y) = g(x,y,z)|_{z=x^2+y^2-1} = x - y + x^2 + y^2 - 1$. Di questa funzione vanno cercati il massimo assoluto e il minimo assoluto sul cerchio $\{x^2+y^2 \leq 4\}$ (cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2)

Facciamo il gradiente di h: $\frac{\partial h}{\partial x} = 1+2x$, $\frac{\partial h}{\partial y} = -1+2y$, e imponendo che queste derivate si annullino si ha $x = -1/2$, $y = 1/2$, che è dunque l'unico punto stazionario (ed è interno al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2).

Il bordo di questo cerchio può essere parametrizzato come $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Dunque la funzione h calcolata sul bordo vale $k(\theta) = 2\cos\theta - 2\sin\theta + 4 - 1 = 2\cos\theta - 2\sin\theta + 3$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcolando $k'(\theta) = -2\sin\theta - 2\cos\theta$ ed azzerandola si trova $\theta = 3\pi/4$ e $\theta = 7\pi/4$.

Dunque il massimo assoluto e il minimo assoluto si trovano cercando il valore massimo e il valore minimo fra:

$h(-1/2, 1/2) = -1/2 - 1/2 + 1/4 + 1/4 - 1 = -3/2$; $k(0) = k(2\pi) = 2+3 = 5$;

$k(3\pi/4) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 = 3 - 2\sqrt{2}$; $k(7\pi/4) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 = 3 + 2\sqrt{2}$.

In conclusione, il minimo assoluto di f è $-3/2$, nel punto $(-1/2, 1/2, -1/2)$; il massimo assoluto di f è $3+2\sqrt{2}$, nel punto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$.

Esercizio 4. (8 punti)
Sia $Q = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - z \leq 1, z \in [0, 1]\}$. Si calcoli l'integrale

$$\iiint_Q (x + y^2)\, dxdydz\,.$$

Risultato: $\boxed{I = \frac{37}{40}\pi}$

Calcoli:

Per $z \in [0,1]$ fissato, la relazione $x^2+y^2-z^2-z \leq 1$ dà un cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $r = \sqrt{1+z^2+z}$ (che indicheremo con $C(z)$).
Dunque un buon metodo di integrazione sembra essere quello per strati:

coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$$\iiint_Q (x+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{C(z)} (x+y^2)\,dx\,dy \stackrel{\uparrow}{=}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \pi$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1+z^2+z}} (\rho\cos\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta)\,\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2+z}} \pi\rho^3\, d\rho = \pi \int_0^1 \frac{(1+z^2+z)^2}{4}\, dz = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1+2z+3z^2+2z^3+z^4)\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{37}{40}\pi\,.$$