ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	11 settembre 2020

1. (6 punti) Determinare l'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-2}{n^3+1}(x^2+x-1)^n$$

è convergente.

Ponendo $t=(x^2+x-1)$ la serie assegnata si trasforma nella serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-2}{n^3+1} t^n, \quad a_n = \frac{n^2-2}{n^3+1}.$$

Il raggio di convergenza è dato da $r=\frac{1}{L}$, ove $L=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Siccome $n^2-2>0$ per $n\geq 2$ e $n^3+1>0$ per ogni $n\geq 0$, si ha

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2-2}{(n+1)^3+1}\,\frac{n^3+1}{n^2-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}\cdot\frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(\frac{(n+1)^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}\right)}=1.$$

Quindi $r=1$ e si ha convergenza per $|x^2+x-1|<1$, cioè

$$-1<x^2+x-1<1 \iff \begin{cases} x^2+x-2<0 \\ x^2+x>0 \end{cases}.$$

Le radici di x^2+x-2 sono $x=\frac{-1\mp\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}-2\\1\end{cases}$; quelle di x^2+x sono $x=0$ e $x=-1$. Dunque c'è convergenza per

$$\{x<-1 \cup x>0\}\cap\{-2<x<1\}=\{-2<x<-1\}\cup\{0<x<1\}.$$

Quando $x^2+x-1=1$ si ha $x=-2$ e $x=1$; in questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-2}{n^3+1},$$ che è asintotica a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

dunque è divergente.

Quando $x^2+x=0$ si ha $x=-1$ e $x=0$; in questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-2}{n^3+1}(-1)^n,$$ a segni alterni per $n\geq 2$.

Siccome $\frac{n^2-2}{n^3+1}\to 0$ e $w\mapsto\frac{w^2-2}{w^3+1}$ è decrescente per w abbastanza grande (la derivata vale $-\frac{w^4-6w^2-2w\ldots}{(w^3+1)^2}$), dal criterio di Leibniz la serie converge. C'è dunque convergenza per $\boxed{\{-2<x\leq-1\}\cup\{0\leq x<1\}}$.

2. **(6 punti)** Determinare la lunghezza del grafico

$$G = \{(x,y) \,|\, y = 1 + x^2, x \in [0,1]\}\,.$$

La formula per calcolare la lunghezza di un grafico $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, è data da

$$\ell(G) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Nel nostro caso $f(x)=1+x^2$, $f'(x)=2x$ e quindi $\ell(G)=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$.

A. Con il cambiamento di variabile $2x=\sinh t$ (seno iperbolico di t) si ha $x=\frac{1}{2}\sinh t$, $dx=\frac{1}{2}\cosh t\,dt$, $x=0\to t=0$, $x=1\to t=\operatorname{arcsinh}2$.

$\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$

Quindi

$$\ell(G)=\int_0^{\operatorname{arcsinh}2}\frac{1}{2}\sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsinh}2}\cosh^2 t\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsinh}2}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8}\int_0^{\operatorname{arcsinh}2}(e^{2t}+2+e^{-2t})\,dt =$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_0^{\operatorname{arcsinh}2}.$$

Ora $t_*=\operatorname{arcsinh}2$ è la soluzione di $\sinh t_*=2$, cioè $\frac{e^{t_*}-e^{-t_*}}{2}=2$, cioè $\frac{e^{2t_*}-1}{e^{t_*}}=4$, cioè $e^{2t_*}-4e^{t_*}-1=0$. Se poniamo $w=e^{t_*}>0$, si ha

$$w^2-4w-1=0 \longrightarrow w=2\mp\sqrt{4+1} \longrightarrow e^{t_*}=2+\sqrt{5}\to t_*=\log(2+\sqrt{5}).$$

In conclusione (essendo $e^{2t}=(e^t)^2$, $e^{-2t}=\frac{1}{(e^t)^2}$)

$$\frac{1}{2+\sqrt5}=\frac{\sqrt5-2}{(2+\sqrt5)(\sqrt5-2)}=\sqrt5-2$$

$$\ell(G)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(2+\sqrt5)^2+2\log(2+\sqrt5)-\frac{1}{2}\frac{1}{(2+\sqrt5)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(\cancel{4}+\cancel{5}+4\sqrt5)+2\log(2+\sqrt5)-\frac{1}{2}(\cancel{5}+\cancel{4}-4\sqrt5)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\log(2+\sqrt5)+\frac{1}{2}\sqrt5\,.$$

[Esercizio svolto in aula: vedi Diario del corso 2019/20, 26 novembre 2019.]

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	11 settembre 2020

2. (6 punti) Determinare la lunghezza del grafico

$$G = \{(x,y) \mid y = 1 + x^2, x \in [0,1]\}.$$

<u>B.</u> Per calcolare $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$ si può utilizzare anche un altro cambiamento di variabile:

$$\sqrt{1+4x^2} = 2x + s.$$

Quindi si ha

$$1+\cancel{4x^2} = (2x+s)^2 = \cancel{4x^2} + 4xs + s^2 \longrightarrow x = \frac{1-s^2}{4s},$$

e dunque

$$dx = \left(\frac{1-s^2}{4s}\right)' ds = \frac{1}{4}\,\frac{-2s\cdot s-(1-s^2)}{s^2}\,ds = -\frac{s^2+1}{4s^2}\,ds.$$

Poi per $x=0$ si ha $s=1$ e per $x=1$ si ha $s=\sqrt5-2$. In conclusione

$$\ell(G) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt5-2}\Big(2\underbrace{\frac{1-s^2}{4s}}_{x}+s\Big)\Big(-\frac{s^2+1}{4s^2}\Big)ds =$$

$$= \int_{\sqrt5-2}^{1} \frac{2-2s^2+4s^2}{4s}\,\frac{s^2+1}{4s^2}\,ds = \frac{1}{8}\int_{\sqrt5-2}^{1}\frac{(1+s^2)^2}{s^3}\,ds =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\sqrt5-2}^{1}\Big(\frac{1}{s^3}+\frac{2}{s}+s\Big)ds = \frac{1}{8}\Big(-\frac{1}{2s^2}+2\log s+\frac{s^2}{2}\Big)\Big|_{\sqrt5-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{8}\Big(-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2(\sqrt5-2)^2}-2\log(\sqrt5-2)-\frac{1}{2}(\sqrt5-2)^2\Big) = \quad \frac{1}{\sqrt5-2} = 2+\sqrt5$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}(\sqrt5+2)^2+2\log\frac{1}{\sqrt5-2}-\frac{1}{2}(5+4-4\sqrt5)\Big) =$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}(\cancel{5}+\cancel{4}+4\sqrt5)+2\log(2+\sqrt5)-\frac{1}{2}(\cancel{5}+\cancel{4}-4\sqrt5)\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt5}{2}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt5).$$

[Esercizio svolto in aula, anche in questa modalità: vedi Diario del corso 2019/20, 26 novembre 2019.]

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	11 settembre 2020

3. (6 punti) (i) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 4y^2 = 2 \\ y(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

(ii) Determinare per quale valore $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha $y(\frac{1}{2}) = 0$.
(iii) Dimostrare che $y(x)$ è strettamente crescente.

(i) È un'equazione <u>non</u>-lineare del 1° ordine. Si può riscrivere come

$$y' = 2 + 4y^2 = 2(1 + 2y^2),$$

ed è dunque a variabili separabili. Si ha

$$\frac{dy}{dx} = 2(1+2y^2) \longrightarrow \int \frac{1}{1+2y^2}\,dy = \int 2\,dx\,.$$

Integrando si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}y) = 2x + c\,,$$

e per $x=0$ si ha $c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\alpha)$. Quindi

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}y) = 2\sqrt{2}x + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\alpha) \rightsquigarrow \sqrt{2}y = \operatorname{tg}\left(2\sqrt{2}x + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\alpha)\right)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(2\sqrt{2}x + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\alpha)\right).}$$

(ii) Imponendo $y(1/2) = 0$ si ha

$$0 = y(1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(\sqrt{2} + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\alpha)\right) \rightsquigarrow \sqrt{2} + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\alpha) = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\sqrt{2}} \quad \text{(la tangente è dispari...)}$$

(iii) Siccome, <u>dall'equazione</u>, $y' = 4y^2 + 2 \geq 2 > 0$, la soluzione y è strettamente crescente.