Analisi Matematica 2

12 gennaio 2017

Esercizio 1

Si consideri la curva piana γ di parametrizzazione

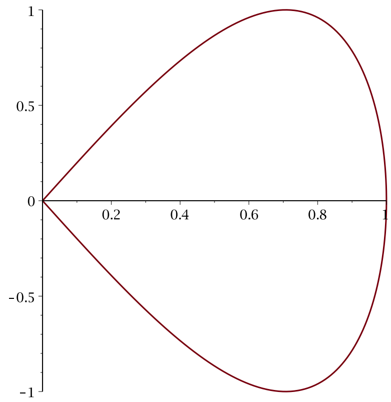
$$\vec{\alpha}(t) = (\sin(t), \sin(2t)), \qquad t \in [0, \pi].$$

1. Si disegni (approssimativamente) il suo sostegno, specificando l'orientazione.

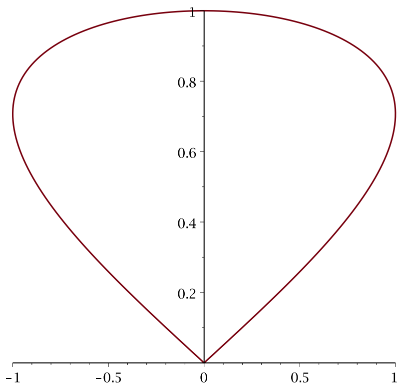
2. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura per ogni valore di $t \in (0, \pi)$.

Soluzione:

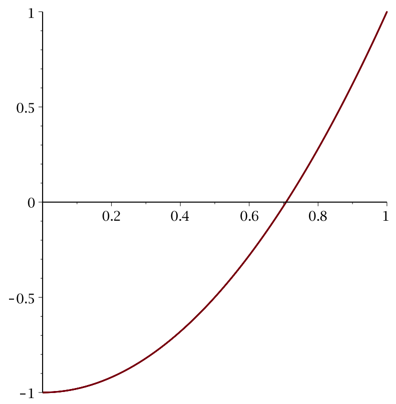
Riportiamo qui di seguito i sostegni delle curve proposte nelle 4 versioni del compito.



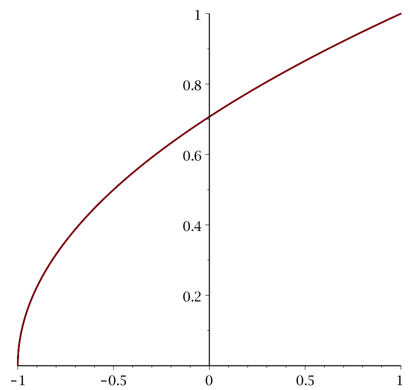
Il sostegno della curva di parametrizzazione $\vec{\alpha}(t) = (\sin(t), \sin(2t))$, $t \in [0, \pi]$. Orientazione oraria.



Il sostegno della curva di parametrizzazione $\vec{\alpha}(t) = (\sin(2t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$. Orientazione antioraria.



Il sostegno della curva di parametrizzazione $\vec{\alpha}(t) = (\cos(t), \cos(2t)),\ t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
È percorso da sinistra a destra (da $(0, -1)$ a $(1, 1)$) e poi da destra a sinistra (da $(1, 1)$ a $(0, -1)$).



Il sostegno della curva di parametrizzazione $\vec{\alpha}(t) = (\cos(2t), \cos(t)),\ t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
È percorso da sinistra a destra (da $(-1, 0)$ a $(1, 1)$) e poi da destra a sinistra (da $(1, 1)$ a $(-1, 0)$).

Immergiamo la curva γ in $\mathbf{R}^3$, parametrizzandola con la funzione $\vec{\alpha} : [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\vec{\alpha}(t) = (\sin(t), \sin(2t), 0), \qquad t \in [0, \pi].$$

Abbiamo:

$$\vec{\alpha}'(t) = (\cos(t), 2\cos(2t), 0), \quad \vec{\alpha}''(t) = (-\sin(t), -4\sin(2t), 0)$$
$$\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t) = (-4\cos(t)\sin(2t) + 2\sin(t)\cos(2t))\hat{e}_z,$$

da cui possiamo dedurre

$$\vec{T}(t) = \frac{(\cos(t), 2\cos(2t), 0)}{\sqrt{\cos^2(t) + 4\cos^2(2t)}},$$
$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|} = -\hat{e}_z$$

[infatti

$$\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t) = (-4\cos(t)\sin(2t) + 2\sin(t)\cos(2t))\hat{e}_z = \sin(t)(-2 - 4\cos^2(t))\hat{e}_z$$
$$\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\| = \sin(t)(2 + 4\cos^2(t)).]$$

Quindi

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) = \frac{(2\cos(2t), -\cos(t), 0)}{\sqrt{\cos^2(t) + 4\cos^2(2t)}},$$

$$k(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\sin(t)(2+4\cos^2(t))}{(\cos^2(t)+4\cos^2(2t))^{3/2}}.$$

Esercizio 2

Si calcolino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x^2z - x^3 + 1$ sull'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, z = x+2y\}$.

Soluzione:

Il calcolo del max e del minimo assoluto di $f(x,y,z) = x^2z - x^3 + 1$ sull'insieme $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ è equivalente al calcolo del max e del minimo assoluto della funzione $g(x,y) = f(x,y,x+2y) = 2x^2y+1$ sull'insieme $A \subset \mathbf{R}^2$ definito da $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Cerchiamo prima eventuali punti interni ad A in cui $\nabla g(x,y) = (0,0)$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4xy = 0 \\ 2x^2 = 0. \end{cases}$$

Sono soluzioni di tale sistema (interne ad A) tutti i punti del cerchio A che hanno coordinata x nulla cioè i punti della forma $(0,y)$, con $y \in (-1,1)$ in cui f vale $g(0,y) = 1$.

Analizziamo ora il bordo di A, cioè la circonferenza $x^2+y^2 = 1$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4xy = \lambda 2x \\ 2x^2 = \lambda 2y \\ x^2+y^2-1 = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione otteniamo due possibili famiglie di soluzioni: $x = 0$ oppure $\lambda = 2y$.

Se $x = 0$ allora $\lambda = 0$ e $y = 1$ oppure $y = -1$. Otteniamo quindi due punti (0,1) e $(0,-1)$ in cui $g = 1$.

Se $\lambda = 2y$, sostituendo nella seconda equazione otteniamo $x^2 = 2y^2$ (da cui $x = \pm\sqrt{2}y$). Sostituendo nella terza otteniamo $y = 1/\sqrt{3}$ e $y = -1/\sqrt{3}$. Abbiamo dunque 4 punti candidati ad essere di max o min assoluto per la funzione g sulla circonferenza:

$(\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, dove g vale $\frac{4}{9}\sqrt{3}+1$

$(\sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, dove g vale $-\frac{4}{9}\sqrt{3}+1$

Concludendo, i punti di minimo assoluto di f su Ω sono:
$(\sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3} - 2/\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -\sqrt{2}/\sqrt{3} - 2/\sqrt{3})$,
dove f vale $-\frac{4}{9}\sqrt{3}+1$, mentre i punti di massimo assoluto di f su Ω sono
$(\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3} + 2/\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -\sqrt{2}/\sqrt{3} + 2/\sqrt{3})$,
dove f vale $\frac{4}{9}\sqrt{3}+1$

Esercizio 3

Sia $Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x > 0, y > 0, z > 0\}$ e sia $\vec{v}_\alpha(x,y,z) = (\alpha x + 2xy, x^\alpha + z^\alpha, 2yz)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Si determini, motivando la risposta, per quale valore α_0 si ha che $\vec{v}_{\alpha_0}$ è conservativo in Q.

2. Si determini un potenziale di $\vec{v}_{\alpha_0}$ e si calcoli $\int_\gamma \vec{v}_{\alpha_0} \cdot d\vec{r}$, ove $\vec{\gamma}$ è la curva di parametrizzazione $\vec{\gamma}(t) = (2+\cos(2\pi t), 2+\sin(2\pi t), 1+t)$, $t \in [0,1]$.

Soluzione:

1. L'insieme Q è semplicemente connesso, quindi condizione necessaria e sufficiente affinché $\vec{v}_\alpha$ sia conservativo è $\nabla \wedge \vec{v}_\alpha = (0,0,0)$. Tale condizione si esplicita nel seguente sistema di tre

equazioni

$$\begin{cases} 2z = \alpha z^{\alpha-1} \\ 0 = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} = 2x, \end{cases}$$

che sono identicamente verificate (cioè verificate per ogni (x, y, z)) se $\alpha = 2$.

2. Se $\alpha = 2$, allora $\vec{v}_\alpha = (2x + 2xy, x^2 + z^2, 2yz)$. Per calcolare un potenziale $U : Q \to \mathbf{R}$, imponiamo prima di tutto la condizione $\frac{\partial}{\partial x}U = 2x + 2xy$, da cui otteniamo $U(x, y, z) = x^2 + x^2y + g(y, z)$. Imponendo la condizione $\frac{\partial}{\partial y}U = x^2 + z^2$ otteniamo $x^2 + \frac{\partial}{\partial y}g = x^2 + z^2$ e dunque $g(y, z) = yz^2 + h(z)$. Infine, imponendo $\frac{\partial}{\partial z}U = 2yz$ otteniamo $h'(z) = 0$ e dunque $h(z) =$ costante. Il potenziale U è quindi della forma

$$U(x, y, z) = x^2 + x^2y + yz^2 + \text{cost}.$$

Il lavoro di $\vec{v}_{\alpha_0}$ lungo la curva γ è dato da

$$\int_\gamma \vec{v}_{\alpha_0} \cdot d\vec{r} = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(3, 2, 2) - U(3, 2, 1) = 6.$$

Esercizio 4

Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z^2 - x^2 - y^2 \leq 1, z \leq 1 - 2x^2 - 2y^2\}$. Si calcoli $\displaystyle\iiint_V z\, dxdydz$.

Soluzione:

Per capire la forma dell'insieme V e impostare l'integrazione è conveniente utilizzare le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$. Esprimendo tramite tali coordinate le disequazioni che definiscono l'insieme V otteniamo:

$$z^2 - \rho^2 \leq 1, \quad z \leq 1 - 2\rho^2, \tag{1}$$

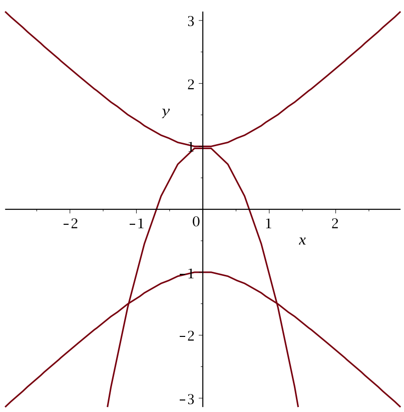
più esplicitamente:

$$-\sqrt{1 + \rho^2} \leq z \leq \sqrt{1 + \rho^2}, \quad z \leq 1 - 2\rho^2 \tag{2}$$

Dato che per ogni valore di ρ si ha che $1 - 2\rho^2 \leq \sqrt{1 + \rho^2}$, allora per descrivere l'insieme V sono sufficienti le diseguaglianze:

$$-\sqrt{1 + \rho^2} \leq z \leq 1 - 2\rho^2 \tag{3}$$

[Graficamente, notiamo che nel piano $z\rho$ le diseguaglianze (1) o, equivalentemente, (2), descrivono la regione compresa fra i due rami di iperbole di equazione $z^2 - \rho^2 = 1$ e al di sotto della parabola di equazione $z = 1 - 2\rho^2$ (si veda figura). Dato che la parabola $z = 1 - 2\rho^2$ si trova sempre al di sotto del ramo di iperbole di equazione $z = \sqrt{1 + \rho^2}$, si evince facilmente che la regione descritta dalle diseguaglianze (2) coincide con la regione descritta dalle diseguaglianze (3).



Possiamo anche pensare all'insieme V come alla regione dello spazio ottenuta ruotando attorno all'asse z la parte del piano zx compresa fra la parabola $z = 1 - 2x^2$ e il ramo di iperbole $z = -\sqrt{1+x^2}$.]
Tornando alle diseguaglianze (3), notiamo che il range di variazione della variabile ρ è quello per cui $-\sqrt{1+\rho^2} \leq 1 - 2\rho^2$. Risovendo otteniamo $0 \leq \rho \leq \sqrt{5/4}$. Abbiamo dunque, utilizzando le coordinate cilindriche (per le quali il modulo del determinante della matrice jacobiana è uguale a ρ)

$$\begin{aligned} \iiint_V z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5/4}} \int_{-\sqrt{1+\rho^2}}^{1-2\rho^2} z\rho dz d\rho d\theta & (4) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5/4}} ((1-2\rho^2)^2 - (1+\rho^2))\rho d\rho d\theta & (5) \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{5/4}} (4\rho^5 - 5\rho^3) d\rho = \ldots = -\frac{125}{192}\pi. & (6) \end{aligned}$$

Un'alternativa è quella di integrare per fili verticali. Intersecando le due superfici $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ e $z = 1 - 2x^2 - 2y^2$ si ottiene $(1 - 2x^2 - 2y^2)^2 = 1 + x^2 + y^2$, cioè $4(x^2+y^2)^2 = 5(x^2+y^2)$, ovvero $x^2+y^2 = 0$ oppure $x^2+y^2 = 5/4$. L'intersezione dunque è data dal punto $(0,0,1)$ e dalla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{5/4}$ (nel piano $z = -3/2$). Quindi si può integrare rispetto a x e a y sul cerchio C di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{5/4}$, ottenendo

$$\iiint_V z\,dxdydz = \iint_C \Big(\int_{-\sqrt{1+x^2+y^2}}^{1-2(x^2+y^2)} z\,dz \Big) dxdy = \frac{1}{2} \iint_C \Big[\Big(1 - 2(x^2+y^2)\Big)^2 - (1 + x^2 + y^2) \Big] dxdy.$$

Passando in coordinate polari, si prosegue come nel conto precedente.