Analisi Matematica 2

12 giugno 2017

Esercizio 1 (7 punti) Si considerino gli insiemi $A \subset \mathbf{R}^3$ e $B \subset \mathbf{R}^3$ definiti da $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e $B = A \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z \geq 1\}$.

1. Rappresentare graficamente entrambi gli insiemi.
2. Calcolare i punti di massimo assoluto e di minimo assoluto sull'insieme B della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2/3$.

Soluzione:

1. L'insieme A è il triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$ giacente sul piano di equazione $x + y + z = 2$, mentre l'insieme B è la parte dell'insieme A che sta al di sopra del piano $z = 1$, cioè il triangolo di vertici $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.
2. La ricerca dei punti di massimo e minimo assoluto della funzione f sull'insieme B viene divisa in due passi principali.

   (a) Ricerca dei punti all'interno del triangolo B, utilizzando il metodo dei moltiplicaori di Lagrange, con $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2/3 - \lambda(x + y + z - 2)$. Cerchiamo le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ \frac{2}{3}z = \lambda \\ x + y + z = 2, \end{cases}$$
   che dà $x = y$ e $z = 3y$, e dunque ha come soluzione $(x, y, z) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$ (e $\lambda = \frac{4}{5}$) in cui la funzione f vale $f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

   (b) Ricerca dei punti di massimo e minimo di f sui tre lati del triangolo. In particolare:

   - il segmento congiungente il punto (1,0,1) con il punto (0,0,2) può essere parametrizzato tramite la mappa $\vec{\alpha}(t) = (1 - t, 0, 1 + t)$, $t \in [0, 1]$. La funzione f valutata su tale segmento vale $f(\vec{\alpha}(t)) = \frac{4}{3}(t^2 - t + 1)$. La derivata $\frac{d}{dt}f(\vec{\alpha}(t)) = \frac{4}{3}(2t - 1)$ si annulla in $t = 1/2$ dove f vale $f(\vec{\alpha}(1/2)) = f(1/2, 0, 3/2) = 1$. Ai due estremi del segmento, in $t = 0$ e $t = 1$, la funzione f vale $f(1, 0, 1) = f(0, 0, 2) = 4/3$;
   - il segmento congiungente il punto (0,1,1) con il punto (0,0,2) può essere parametrizzato tramite la mappa $\vec{\alpha}(t) = (0, 1 - t, 1 + t)$, $t \in [0, 1]$. La funzione f valutata su tale segmento vale $f(\vec{\alpha}(t)) = \frac{4}{3}(t^2 - t + 1)$. La derivata $\frac{d}{dt}f(\vec{\alpha}(t)) = \frac{4}{3}(2t - 1)$ si annulla in $t = 1/2$ dove f vale $f(\vec{\alpha}(1/2)) = f(0, 1/2, 3/2) = 1$. Ai due estremi del segmento, in $t = 0$ e $t = 1$, la funzione f vale $f(0, 1, 1) = f(0, 0, 2) = 4/3$;
   - il segmento congiungente il punto (1,0,1) con il punto (0,1,1) può essere parametrizzato tramite la mappa $\vec{\alpha}(t) = (1-t, t, 1)$, $t \in [0, 1]$. La funzione f valutata su tale segmento vale $f(\vec{\alpha}(t)) = 2t^2 - 2t + \frac{4}{3}$. La derivata $\frac{d}{dt}f(\vec{\alpha}(t)) = 4t - 2$ si annulla in $t = 1/2$ dove f vale $f(\vec{\alpha}(1/2)) = f(1/2, 1/2, 1) = 5/6$. Ai due estremi del segmento, in $t = 0$ e $t = 1$, la funzione f vale $f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = 4/3$.

   In conclusione, il punto di minimo assoluto per f su B è $(2/5, 2/5, 6/5)$ in cui f vale $4/5$, mentre i punti di massimo assoluto sono (1,0,1), (0,1,1) e (0,0,2) in cui f vale $4/3$.

Esercizio 2 (7 punti)

1. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito da:
$$\vec{F}(x, y, z) = (2x\sin(yz) + 1, x^2 z\cos(yz) - z^\alpha, x^2 y\cos(yz) - \alpha zy)$$
è conservativo?

2. Per ognuno dei valori di α calcolati al punto 1, determinare un potenziale U e calcolare inoltre il lavoro del corrispondente campo $\vec{F}$ lungo la curva di parametrizzazione $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \pi]$.

Soluzione:

1. Dato che il campo vettoriale $\vec{F}$ è di classe C^1 su $\mathbf{R}^3$, insieme semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché $\vec{F}$ sia conservativo è $\operatorname{rot}\vec{F} = (0, 0, 0)$. Devono quindi verificarsi le tre condizioni $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$, $\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$, $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$, ovvero
$$\begin{cases} x^2\cos(yz) - x^2yz\sin(yz) - \alpha z^{\alpha-1} = x^2\cos(yz) - x^2yz\sin(yz) - \alpha z \\ 2xy\cos(yz) = 2xy\cos(yz) \\ 2xz\cos(yz) = 2xz\cos(yz), \end{cases}$$
da cui possiamo dedurre che $\vec{F}$ è conservativo se e solo se $\alpha z^{\alpha-1} = \alpha z$, cioè se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 2$.
Se $\alpha = 0$ allora $\vec{F}(x, y, z) = (2x\sin(yz) + 1, x^2z\cos(yz) - 1, x^2y\cos(yz))$. Il potenziale U si ottiene imponendo inizialmente $\frac{\partial U}{\partial x} = 2x\sin(yz) + 1$, da cui si ricava $U(x, y, z) = x^2\sin(yz) + x + g(y, z)$. Imponendo $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2z\cos(yz) - 1$ viene $x^2z\cos(yz) + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2z\cos(yz) - 1$, quindi $g(y, z) = -y + k(z)$. Infine da $\frac{\partial U}{\partial z} = x^2y\cos(yz)$ viene $k'(z) = 0$, cioè $k(z) = \text{costante}$. In conclusione
$$U(x, y, z) = x^2\sin(yz) + x - y + \text{costante}.$$
Se $\alpha = 2$ allora $\vec{F}(x, y, z) = (2x\sin(yz) + 1, x^2z\cos(yz) - z^2, x^2y\cos(yz) - 2zy)$ e con conti analoghi ai precedenti si verifica che il potenziale è dato da
$$U(x, y, z) = x^2\sin(yz) + x - z^2y + \text{costante}.$$

2. Dato che $\vec{F}$ è conservativo, il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva $\vec{\gamma}$ è dato da
$$L = U(\vec{\gamma}(t)) - U(\vec{\gamma}(0)) = U(-1, 0, \pi) - U(1, 0, 0).$$
Utilizzando le espressioni per il potenziale U calcolato al punto 1, otteniamo che in entrambi i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$ il lavoro vale
$$L = U_{\alpha=0}(\vec{\gamma}(\pi)) - U_{\alpha=0}(\vec{\gamma}(0)) = U_{\alpha=0}(-1, 0, \pi) - U_{\alpha=0}(1, 0, 0) = -2$$
$$L = U_{\alpha=2}(\vec{\gamma}(\pi)) - U_{\alpha=2}(\vec{\gamma}(0)) = U_{\alpha=2}(-1, 0, \pi) - U_{\alpha=2}(1, 0, 0) = -2.$$

Esercizio 3 (8 punti)

Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + (y - z)^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\iiint_V (y + z)\,dxdydz$.

Soluzione:

Integrando per strati

$$\iiint_V (y+z)\,dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (y+z) dxdy \right) dz,$$

dove $D_z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + (y-z)^2 \le z^2\}$ è il cerchio di centro $(0,z)$ e raggio z. Per descrivere D_z introduciamo le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = z + \rho \sin\theta \end{cases}$$

con $\rho \in [0,z]$, $\theta \in [0,2\pi]$. Utilizzando la formula di cambiamento di variabili nell'integrale in D_z otteniamo (il modulo del determinante della matrice jacobiana è uguale a ρ...):

$$\begin{aligned} \iiint_V (y+z)\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (y+z) dxdy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^z (2z + \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^1 z^3 dz = \pi/2. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si considerino il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, 0, z)$ e la superficie $S \subset \mathbf{R}^3$ definita da

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \alpha\sqrt{x^2+y^2}, 1 \le z \le 4 \right\},$$

dove α è un numero reale positivo. Si determini il valore di α in modo che il flusso di $\vec{F}$ attraverso S (scegliendo la normale che punti verso l'alto) valga π.

Soluzione:
Parametrizziamo la superficie S con la mappa $\vec{r}$ data da

$$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \alpha\rho), \qquad \theta \in [0,2\pi], \rho \in [1/\alpha, 4/\alpha].$$

Possiamo calcolare una coppia di vettori tangenti

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{r}(\rho,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \alpha) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{r}(\rho,\theta) = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0),$$

e un vettore normale

$$\vec{N}(\rho,\theta) = \frac{\partial}{\partial\rho}\vec{r}(\rho,\theta) \wedge \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{r}(\rho,\theta) = (-\alpha\rho\cos\theta, -\alpha\rho\sin\theta, \rho),$$

che rispetta l'orientazione prescritta ($\vec{N}$ punta infatti verso l'alto in quanto la terza componente è positiva). Il flusso di $\vec{F}$ attraverso S è quindi dato da:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_{1/\alpha}^{4/\alpha} (\alpha^2\rho^2, 0, \alpha\rho) \cdot (-\alpha\rho\cos\theta, -\alpha\rho\sin\theta, \rho) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{1/\alpha}^{4/\alpha} \left(-\alpha^3\rho^3\cos\theta + \alpha\rho^2 \right) d\rho d\theta = \frac{42\pi}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Il flusso vale π se $\alpha = \sqrt{42}$.
Si può anche risolvere l'esercizio considerando una parametrizzazione alternativa, guardando alla superficie come un grafico. In questo caso si pone $\vec{R}(x,y) = (x, y, \alpha\sqrt{x^2+y^2})$, con (x,y) nella corona circolare C_α di raggio interno $\frac{1}{\alpha}$ e raggio esterno $\frac{4}{\alpha}$.
Si ha

$$\vec{N}(x,y) = \Big(-\alpha\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}, -\alpha\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}, 1\Big) = \Big(-\alpha\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\alpha\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big),$$

che è orientato verso l'alto. Quindi

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS &= \iint_{C_\alpha} (\alpha^2(x^2+y^2), 0, \alpha\sqrt{x^2+y^2})\cdot\Big(-\alpha\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\alpha\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big)dxdy \\ &= \iint_{C_\alpha} (-\alpha^3 x\sqrt{x^2+y^2} + \alpha\sqrt{x^2+y^2})dxdy.\end{aligned}$$

Passando in coordinate polari (modulo del determinante della matrice jacobiana uguale a ρ...) si ottiene

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{1/\alpha}^{4/\alpha}(-\alpha^3\rho^2\cos\theta + \alpha\rho)\rho d\rho\Big)d\theta = 2\pi\int_{1/\alpha}^{4/\alpha}\alpha\rho^2 d\rho = \ldots = \frac{42\pi}{\alpha^2}.$$