COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Analisi Matematica 2

12 luglio 2018

Esercizio 1. (7 punti) Determinare, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto in $\mathbf{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2-4)e^{x^2+y^2}\,.$$

Determinare inoltre, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto di f in

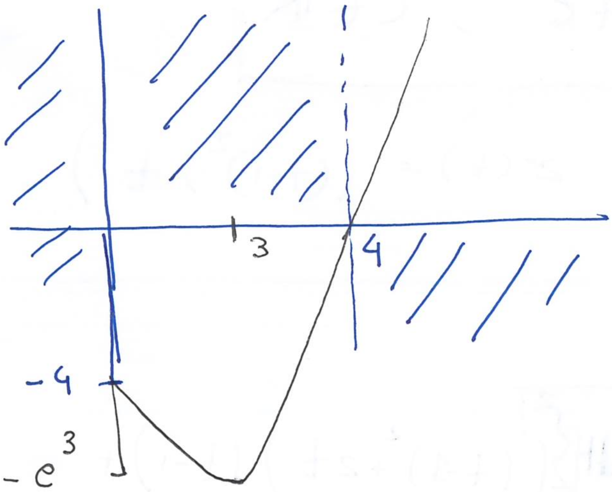
$$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Soluzione:

$\boxed{\nexists \max_{\mathbb{R}^2} f}$: $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} (x^2-4)e^{x^2} = +\infty$

$\exists \min_{\mathbb{R}^2} f$: la funzione ha simmetria circolare dunque basta studiare la funzione $g(\rho) = (\rho-4)e^{\rho}$, $\rho \geq 0$.

$g'(\rho) = (\rho-3)e^{\rho}$ 0 $-$ 3 $+$



dunque tutti i punti del tipo $\{x^2+y^2=3\}$ sono ~~min~~ punti di minimo.

e $\min_{\mathbb{R}^2} f = -e^3$

In $\mathring{C}$ lo studio è analogo a prima

In ∂C la funzione vale 0.

Poiché C è chiuso e limitato e f continua.

$\exists \max_C f$ e $\min_C f$ $\Rightarrow$

$\max_C f = 0$ assunto su $\{x^2+y^2=4\}$.

$\min_C f = -e^3$ " su $\{x^2+y^2=3\}$.

Esercizio 2. (8 punti) Determinare i valori di $\beta \in \mathbf{R}$ per cui il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x^2+2y, y^3-2\beta x)$ è conservativo. Per tali valori di β determinare tutti i potenziali di $\vec{F}$. Calcolare inoltre, per ogni valore di $\beta \in \mathbf{R}$, il lavoro di $\vec{F}$ lungo l'arco di parabola γ congiungente, nell'ordine, i punti $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$ (cioè calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$).

Soluzione:

Poiché F è definito su $\mathbb{R}^2$ basta imporre $\mathrm{rot}\,\vec{F} = (0,0)$ da cui $\beta = -1$

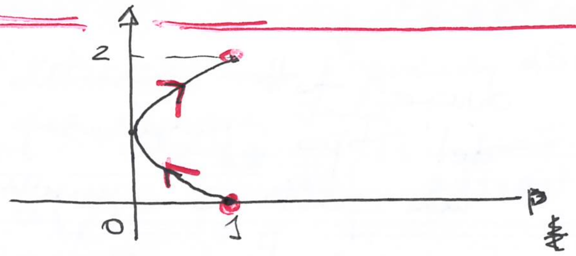
$$F(x,y) = (x^2+2y,\ y^3+2x)$$

$$U_x = x^2+2y \implies U(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy + h(y)$$

$$U_y = 2x + h'(y) = y^3+2x \implies h'(y) = y^3$$

$$\implies h(y) = y^4/4.$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} + 2xy + c, \quad c \in \mathbb{R}.}$$



$$\gamma(t) = ((t-1)^2, t), \quad 0 \le t \le 2$$

da cui:

$$\boxed{\int_\gamma F = \int_0^2 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt}$$

$$F(\gamma(t)) = ((t-1)^4+2t,\ t^3-2\beta(t-1)^2).$$

$$\gamma'(t) = (2(t-1), 1)$$

$$= \int_0^2 2(t-1)((t-1)^4+2t) + t^3 - 2\beta(t-1)^2\, dt$$

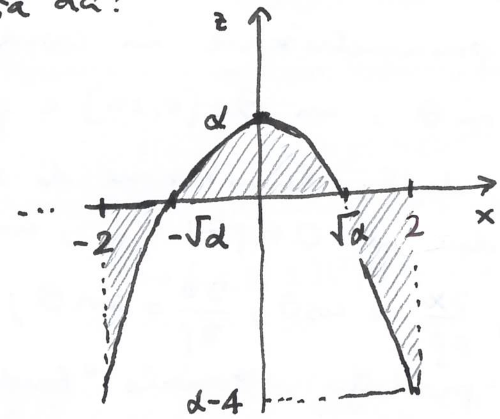
$$= \boxed{\text{analisi 1}} = -\frac{4}{3}(\beta-5)$$

N.B: Se $\beta = -1$ $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8 = U((1,2)) - U((1,0))$.

Esercizio 3. (7 punti) Calcolare, per ogni valore del parametro $\alpha \in [0,4]$, il volume della regione R_α compresa fra il piano $\{z=0\}$ e la superficie $\{z=\alpha-x^2-y^2 \,|\, x^2+y^2\le 4\}$.

Soluzione:

La superficie è una superficie di rotazione, la cui sezione nel piano (x,z) è data da:



Il volume si può quindi calcolare come

$$\mathrm{Vol}(R_\alpha) = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{\alpha}} \left[\int_0^{\alpha-x^2-y^2} dz\right] dx\,dy + \iint_{\sqrt{\alpha}\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2} \left[\int_{\alpha-x^2-y^2}^{0} dz\right] dx\,dy,$$

dove il primo integrale scompare se $\alpha=0$, e il secondo scompare se $\alpha=4$.

In coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, con jacobiano ρ, si ha

$$\mathrm{vol}(R_\alpha) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\alpha}} (\alpha-\rho^2)\rho\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{\alpha}}^{2} (-\alpha+\rho^2)\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left[\left(\frac{\alpha\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{\alpha}} + \left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\alpha\rho^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{\alpha}}^{2}\right] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{16}{4}-\frac{4\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{2}\right] = 2\pi\left(\frac{\alpha^2}{2}-2\alpha+4\right).$$

Esercizio 4. (8 punti) Sia $Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq y^2 + z^2 - 1, 0 \leq x \leq 2\}$. Si calcoli l'area della superficie **laterale** S di Q (cioè senza tenere conto delle due superfici che fanno parte di ∂Q e che sono contenute nei piani $\{x = 0\}$ e $\{x = 2\}$).

Soluzione:

A. La superficie laterale di Q è una superficie di rotazione attorno all'asse x, che si può parametrizzare in coordinate cilindriche: $x = \rho^2 - 1$, $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\rho \in [1, \sqrt{3}]$ (questa limitazione per ρ deriva dalla limitazione di x, che deve soddisfare $0 \leq x \leq 2$: dunque $0 \leq \rho^2 - 1 \leq 2$, cioè $1 \leq \rho \leq \sqrt{3}$).

Si ha dunque $\dfrac{\partial x}{\partial \rho} = 2\rho$, $\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta$, $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \sin\theta$; $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \rho\cos\theta$, e quindi il prodotto vettoriale "fondamentale" risulta

$$\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\rho & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = (\rho, -2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta),$$

il cui modulo vale

$$\sqrt{\rho^2 + 4\rho^4\cos^2\theta + 4\rho^4\sin^2\theta} = \rho\sqrt{1+4\rho^2}.$$

L'elemento d'area è quindi $dS = \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta$.

L'area dunque vale

$$a(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{3}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho = 2\pi\,(1+4\rho^2)^{3/2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{8}\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(1+12)^{3/2} - (1+4)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}\right).$$

B. Parametrizzando la superficie come un grafico: $x = y^2 + z^2 - 1 = f(y,z)$, $y = y$, $z = z$, con $x = y^2 + z^2 - 1 \in [0, 2]$, cioè $1 \leq y^2 + z^2 \leq 3$, si ha

$dS = \sqrt{1 + |\nabla f(y,z)|^2}\,dy\,dz = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\,dy\,dz$ e dunque

$$a(S) = \iint_{1 \leq y^2+z^2 \leq 3} \sqrt{1+4y^2+4z^2}\,dy\,dz.$$

In coordinate polari $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $1 \leq \rho \leq \sqrt{3}$ e jacobiano ρ, si ha

$$a(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{3}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho \underset{\text{come sopra}}{=\dots=} \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}\right).$$

Esercizio 4. (8 punti) Sia $Q = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq y^2 + z^2 - 1, 0 \leq x \leq 2\}$. Si calcoli l'area della superficie **laterale** S di Q (cioè senza tenere conto delle due superfici che fanno parte di ∂Q e che sono contenute nei piani $\{x = 0\}$ e $\{x = 2\}$).

Soluzione:

C. Ricordandosi quanto appreso nel corso di Analisi Matematica 1 riguardo all'area delle superfici ottenute facendo ruotare il grafico di una funzione di una variabile, si vede subito che la funzione è $g(y) = y^2 - 1$, con y che varia in modo che $x = g(y)$ stia fra 0 e 2, cioè $y^2 - 1 \geq 0$ e $y^2 - 1 \leq 2$, in conclusione $1 \leq y \leq \sqrt{3}$.

La formula per l'area è:

$$a(S) = 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} y \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} y \sqrt{1 + 4y^2}\, dy \underset{\text{come sopra}}{= \cdots =} 2\pi \frac{\pi}{12}(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})$$

[L'asse di rotazione è l'asse x, la funzione è una funzione di y: quindi la distanza dall'asse è y...]