ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2014

1. **(6 punti)** Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado e di centro $x_0 = 0$ di

$$f(x) = (1 - \cos(2x))^2 - (\log(1 - 3x))^2 .$$

Lo sviluppo di $\cos t$ è $1 - t^2/2 + o(t^2)$, per cui

$$(1-\cos(2x))^2 = \left(1-\left(1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)^2 = \left(2x^2+o(x^2)\right)^2 =$$

$$= 4x^4 + o(x^4).$$

Lo sviluppo di $\log(1+t)$ è $t - t^2/2 + t^3/3 + o(t^3)$, per cui

$$(\log(1-3x))^2 = \left(-3x - \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 =$$

$$= 9x^2 + \frac{81}{4}x^4 + o(x^4) + 27x^3 + 54x^4 = 9x^2 + 27x^3 + \frac{297}{4}x^4 + o(x^4).$$

In conclusione

$$f(x) = 4x^4 + o(x^4) - 9x^2 - 27x^3 - \frac{297}{4}x^4 =$$

$$= -9x^2 - 27x^3 - \frac{281}{4}x^4 + o(x^4),$$

e dunque $\quad P_4(x) = -9x^2 - 27x^3 - \frac{281}{4}x^4 .$

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2014

2. **(6 punti)** Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{2x^2+1} & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{4}{3} & \text{se } -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ -x^3 + 2x^2 - x + 1 & \text{se } x \ge 0\,, \end{cases}$$

determinarne gli eventuali valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo e i punti in cui essi sono raggiunti. Inoltre disegnarne qualitativamente il grafico (non sono richiesti punti di azzeramento e studio della convessità/concavità).

Si ha $\lim_{x\to -1/2^-} f(x) = -\frac{5/4}{3/2} = -5/6$, $f(-1/2) = \lim_{x\to -1/2^+} f(x) = 1/2 - 4/3 = -5/6$ [dunque f è continua in $x=-1/2$], $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -4/3$, $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ [dunque $f(x)$ è discontinua, con discontinuità di salto, in $x=0$], $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1/2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

Per $x<-1/2$ la derivata vale

$$f'(x) = \frac{(2-2x)(2x^2+1)-(2x-x^2)4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-4x^2-2x+2}{(2x^2+1)^2} = -2\,\frac{2x^2+x-1}{(2x^2+1)^2}\,.$$

Si ha $f'(x) \geq 0$ per $2x^2+x-1 \leq 0$, cioè $-1<x<1/2$ con $x<-1/2$, dunque f cresce per $-1<x<-1/2$, decresce per $x<-1$. Si ha $f(-1) = \frac{-3}{3} = -1$.

Per $-1/2 \le x < 0$ $f(x)$ è una retta passante per $(-1/2, -5/6)$ e $(0, -4/3)$. (ma questo estremo mai raggiunto, perché $x<0$...).

Per $x>0$ la derivata vale $-3x^2+4x-1$, che si annulla per $x=1/3$ e $x=1$, ed è positiva per $1/3<x<1$. Dunque f cresce per $\frac{1}{3}<x<1$ e decresce per $0<x<1/3$ e $x>1$. Si ha $f(1/3) = \frac{23}{27}$ e $f(1)=1$.

In conclusione: non c'è minimo assoluto (poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$...), il valore massimo assoluto è 1, assunto in $x=0$ e $x=1$; il punto $x=-1$ è un punto di minimo relativo, con valore -1; il punto $x=-1/2$ è un punto di massimo relativo, con valore $-5/6$; il punto $x=1/3$ è un punto di minimo relativo, con valore $23/27$.

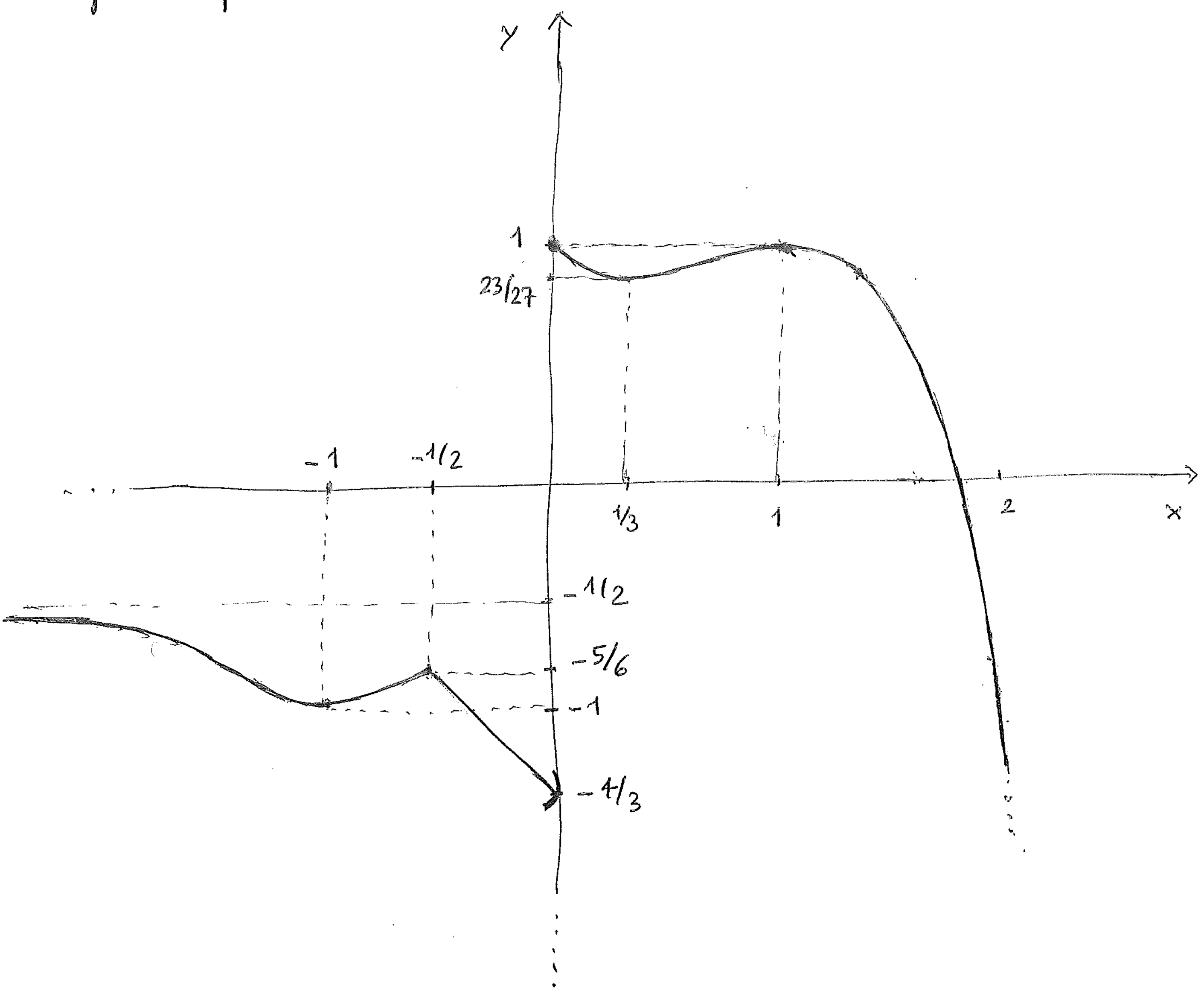
ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2014

2. (6 punti) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{2x^2+1} & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{4}{3} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -x^3 + 2x^2 - x + 1 & \text{se } x \geq 0\,, \end{cases}$$

determinarne gli eventuali valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo e i punti in cui essi sono raggiunti. Inoltre disegnarne qualitativamente il grafico (non sono richiesti punti di azzeramento e studio della convessità/concavità).

Grafico qualitativo:



ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2014

3. (6 punti) Per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ si determini la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = \cos x \\ y(0) = \beta\,, \end{cases}$$

e quindi si determini per quali valore di β la soluzione soddisfa $y(\pi) = 0$.

Si tratta di un'equazione del I° ordine, lineare, non-omogenea.
La formula risolutiva dà:

$$y(x) = e^{-\int_0^x 2\,dt}\left(\beta + \int_0^x e^{+\int_0^s 2\,dt}\cos s\,ds\right) =$$

$$= e^{-2x}\left(\beta + \int_0^x e^{2s}\cos s\,ds\right).$$

Calcoliamo, per parti

$$\int_0^x e^{2s}\cos s\,ds = e^{2s}\operatorname{sen} s\Big|_0^x - \int_0^x 2e^{2s}\operatorname{sen} s\,ds = e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\left[-e^{2s}\cos s\Big|_0^x + \right.$$

$$\left. + \int_0^x 2e^{2s}\cos s\,ds\right] = e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x - 2 - 4\int_0^x e^{2s}\cos s\,ds,$$

da cui

$$\int_0^x e^{2s}\cos s\,ds = \frac{1}{5}e^{2x}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x - \frac{2}{5}.$$

Quindi

$$y(x) = \beta e^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{1}{5}e^{2x}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x - \frac{2}{5}\right) =$$

$$= \left(\beta - \frac{2}{5}\right)e^{-2x} + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\cos x.$$

Si ha

$$y(\pi) = \left(\beta - \frac{2}{5}\right)e^{-2\pi} - \frac{2}{5},$$

per cui $y(\pi) = 0$ per $\beta = \frac{2}{5}e^{2\pi} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\left(e^{2\pi} + 1\right)$.

Altra via: le soluzioni dell'omogenea sono date da ce^{-2x}. Una soluzione particolare della non-omogenea è della forma $A\operatorname{sen} x + B\cos x$, e sviluppando i conti... Questo approccio funziona perché l'equazione è lineare a coefficienti costanti!