| ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello | 14 febbraio 2019 |
|---|---|

**1. (6 punti)** Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log(1 - \tan x)$. [Con log si intende il logaritmo naturale in base $e$, da alcuni scritto come ln.]

Sappiamo che $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ (è una funzione dispari, nello sviluppo contiene solo i termini di grado dispari, dunque dopo il grado 3 si salta al grado 5, che è $o(x^4)$...).

Poi $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ (sarà $t = -\tan x$, che è un termine che va come $-x$, quindi per arrivare a $o(x^4)$ occorre sviluppare fino a $o(t^4)$...).

Quindi, con $t = -\tan x$

$$\log(1-\tan x) = -\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 +$$

$$- \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

[si deve avere $+ (-\tan x)^3/3$, cioè $-\frac{1}{3}(\tan x)^3$...]

$o((-\tan x)^4) = o(x^4)$...

$$= -x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(x^3 + o(x^4)\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= -x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4).$$

Dunque $P_4(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello | 14 febbraio 2019 |
|---|---|

**2. (6 punti)** Si determini l'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\frac{4x^2+6x}{5x^2+2}\right)^n$$

è convergente.

Ponendo $t = \frac{4x^2+6x}{5x^2+2}$ possiamo considerare la serie di potenze $\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} t^n$.

Il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{L}$, ove

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{|(-1)^{n+1}/(n+1)^2|}{|(-1)^n/n^2|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Quindi la serie converge per $|t| = \left|\frac{4x^2+6x}{5x^2+2}\right| < 1$, e non converge per $|t| = \left|\frac{4x^2+6x}{5x^2+2}\right| > 1$.

Si ha

$$\left|\frac{4x^2+6x}{5x^2+2}\right| < 1 \iff |4x^2+6x| < 5x^2+2 \iff -5x^2-2 < 4x^2+6x < 5x^2+2.$$

Si ha $-5x^2-2 < 4x^2+6x$ se $9x^2+6x+2 > 0$, cioè $(3x+1)^2+1 > 0$, il che è sempre vero (in altre parole, $9x^2+6x+2=0$ non ha radici reali...). Si ha $4x^2+6x < 5x^2+2$ se $x^2-6x+2 > 0$, cioè, essendo $3-\sqrt{7}$ e $3+\sqrt{7}$ le radici di $x^2-6x+2$, per $x < 3-\sqrt{7}$ e $x > 3+\sqrt{7}$.

Dunque la serie <u>converge</u> per $x < 3-\sqrt{7}$ e per $x > 3+\sqrt{7}$, <u>non</u> converge per $3-\sqrt{7} < x < 3+\sqrt{7}$.

Per $x = 3-\sqrt{7}$ si ha $4x^2+6x = 5x^2+2$, dunque la serie diventa $\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, che è assolutamente convergente, dunque convergente (oppure è convergente per il criterio di Leibniz...).

Lo stesso accade per $x = 3+\sqrt{7}$.

In conclusione l'insieme richiesto è $x \leq 3-\sqrt{7}$ unito a $x \geq 3+\sqrt{7}$.

**3. (6 punti)** Si calcoli l'integrale
$$\int_0^{1/2} \frac{x^5}{x^4+4x^2+4} dx\,.$$

Si tratta di un integrale di funzione razionale. Per ridurre il grado del denominatore da 4 a 2 si può cambiare variabile ponendo $t = x^2$ (e dunque $dt = 2x\,dx$, $x=0 \to t=0$, $x = 1/2 \to t = 1/4$).

$$\int_0^{1/2} \frac{x^5}{x^4+4x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{t^2}{t^2+4t+4}\,dt\,.$$

Ora si può eseguire la divisione di $t^2$ rispetto a $t^2+4t+4$, per arrivare a un numeratore di grado <u>strettamente minore</u> del grado del denominatore. In modo equivalente, ma più semplice, si può sommare e sottrarre $4t+4$:

$$\frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{t^2}{t^2+4t+4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{1/4}\left(\frac{t^2+4t+4}{t^2+4t+4} - 4\,\frac{t+1}{t^2+4t+4}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/4} 1\,dt - \int_0^{1/4} \frac{2t+2}{t^2+4t+4}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \int_0^{1/4}\frac{2t+4-2}{(t+2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8} - \int_0^{1/4}\frac{2}{t+2}\,dt + 2\int_0^{1/4}\frac{1}{(t+2)^2}\,dt = \frac{1}{8} - 2\log|t+2|\,\Big|_0^{1/4} - 2\,\frac{1}{t+2}\,\Big|_0^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{8} - 2\log 9/8 - 2\,\frac{4}{9} + 2\,\frac{1}{2} = \frac{17}{72} - 2\log 9/8\,.$$