ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2020

1. (6 punti) (i) Si disegni il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \begin{cases} xe^{-3x} & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{3-x}{x^2} & \text{per } x < 0 \end{cases}$. In particolare, si determinino l'insieme di definizione, la continuità, i limiti a $+\infty$ e $-\infty$ e negli eventuali punti di discontinuità, gli eventuali asintoti obliqui, la crescenza/decrescenza, la convessità/concavità.
(ii) Si determinino il punto e il valore di minimo assoluto di f nel suo insieme di definizione.

(i) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($f(x) = \frac{3-x}{x^2}$ per $x<0$, dunque il denominatore non si annulla mai).

Si ha $f(0) = xe^{-3x}|_{x=0} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-3x} = 0$, e
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3-x}{x^2} = +\infty$.

Quindi $f(x)$ non è continua in $x=0$.

Poi si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$ (l'esponenziale tende all'infinito più velocemente di x) e $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{x^2} = 0$ (x^2 tende a $+\infty$ più rapidamente di $3-x$).

Poiché non si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, non ci sono asintoti obliqui. Poi si ha $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) > 0$ per $x < 0$.

$(x>0)$ $f'(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = (1-3x)e^{-3x}$, >0 per $x < 1/3$ e <0 per $x > 1/3$. Quindi f cresce per $0<x<1/3$, decresce per $x>1/3$. [Non richiesto: $x = 1/3$ è punto di massimo relativo.]

$f''(x) = -3e^{-3x} - 3(1-3x)e^{-3x} = -3e^{-3x}(2-3x)$, >0 per $x > \frac{2}{3}$ e <0 per $x < 2/3$. Quindi f è convessa per $x > 2/3$, concava per $0 < x < 2/3$.

$(x<0)$ $f'(x) = \frac{-x^2-(3-x)2x}{x^4} = \frac{x-6}{x^3} > 0$ per $x<0$. Quindi f è crescente per $x<0$.

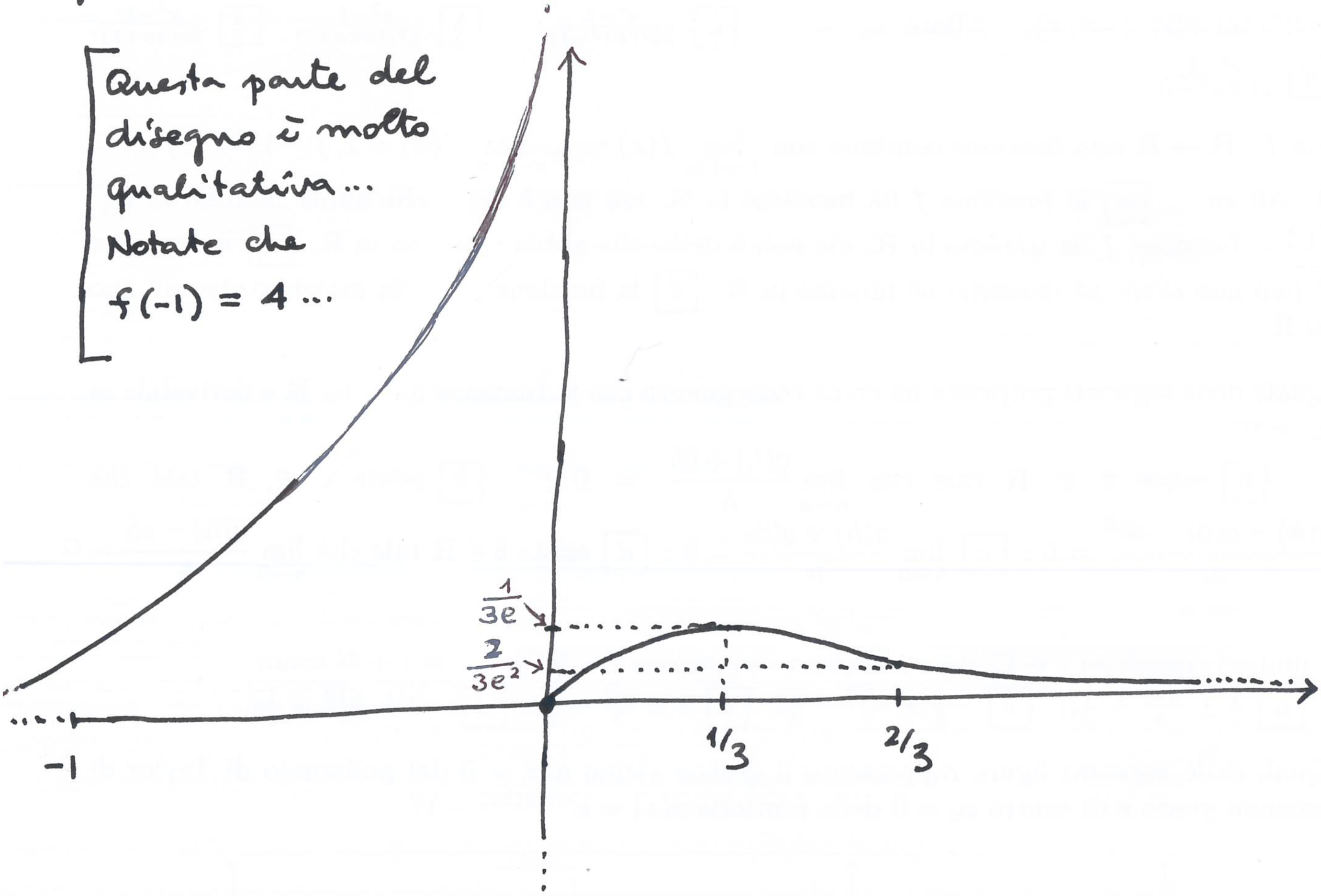
$f''(x) = \frac{x^3-(x-6)3x^2}{x^6} = 2\,\frac{9-x}{x^4} > 0$ per $x<0$. Quindi f è convessa per $x<0$.

(ii) Siccome $f(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, $x=0$ è punto di minimo assoluto, e il valore di minimo è 0.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2020

1. **(6 punti)** (i) Si disegni il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \begin{cases} xe^{-3x} & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{3-x}{x^2} & \text{per } x < 0 \end{cases}$. In particolare, si determinino l'insieme di definizione, la continuità, i limiti a $+\infty$ e $-\infty$ e negli eventuali punti di discontinuità, gli eventuali asintoti obliqui, la crescenza/decrescenza, la convessità/concavità. (ii) Si determinino il punto e il valore di minimo assoluto di f nel suo insieme di definizione.

Grafico qualitativo:



ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2020

2. (6 punti) Si calcoli l'integrale
$$\int_0^2 \frac{3x^5 - x^2}{x^6+3}dx\,.$$

Si è affrontato solamente il calcolo di integrali razionali con denominatore di 2° grado. Questo suggerisce di cambiare variabile con $t = x^3$, $dt = 3x^2dx$, $x=0 \to t=0$, $x=2 \to t=8$. Si ottiene

$$\int_0^2 \frac{3x^5-x^2}{x^6+3}dx = \int_0^2 \frac{(x^3-1/3)\,3x^2}{x^6+3}dx = \int_0^8 \frac{t-1/3}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log(t^2+3)\Big|_0^8 - \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{2}\log\frac{67}{3} - \frac{1}{9}\int_0^8 \frac{1}{(t^2/3+1)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{67}{3} - \frac{1}{9}\left(\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}\,\Big|_0^8 = \frac{1}{2}\log\frac{67}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right).$$

[Se non si è stati in grado di riconoscere le primitive di $t/_{t^2+3}$ e di $1/_{(t^2/3+1)}$ "a colpo d'occhio", si può procedere con i cambiamenti di variabile $s = t^2+3$ e $w = t/\sqrt{3}$, e si giunge facilmente al risultato...]

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	14 febbraio 2020

3. (6 punti) (i) Per ogni valore dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 2\cos x \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta\,. \end{cases}$$

(ii) Si determinino α e β affinché la soluzione sia periodica.

(i) Si tratta di un'equazione lineare del II° ordine a coefficienti costanti, non-omogenea.

Tutte le soluzioni dell'omogenea si trovano tramite le radici del polinomio associato r^2+4r+3, che sono $r = -2 \mp \sqrt{4-3} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$.

Dunque $y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$.

Una soluzione particolare della non-omogenea si trova con il metodo di "somiglianza", cioè si cerca della forma

$$y_*(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Si ha $y_*' = -A\sin x + B\cos x$, $y_*'' = -A\cos x - B\sin x$, per cui

$$y_*'' + 4y_*' + 3y_* = -A\cos x - B\sin x - 4A\sin x + 4B\cos x + 3A\cos x + 3B\sin x$$
$$= (2A+4B)\cos x + (2B-4A)\sin x = 2\cos x,$$

cioè $2B-4A=0$ e $2A+4B=2$

$\hookrightarrow B=2A \longrightarrow \hookrightarrow 2A+8A=2 \rightarrow A=1/5 \rightarrow B=2/5$.

Si è così ottenuto $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 1/5 \cos x + 2/5 \sin x$, e di conseguenza $y'(x) = -3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x} - 1/5 \sin x + 2/5 \cos x$, per cui, imponendo i dati di Cauchy si ha

$$\begin{cases} \alpha = y(0) = c_1 + c_2 + 1/5 \rightarrow c_1 = \alpha - 1/5 - c_2 \rightarrow c_1 = \alpha - 1/5 - \frac{3\alpha+\beta}{2} + 1/2 = \frac{3}{10} - \frac{\alpha+\beta}{2}. \\ \beta = y'(0) = -3c_1 - c_2 + 2/5 \rightarrow \beta = -3\alpha + 3/5 + 3c_2 - c_2 + 2/5 \rightarrow 2c_2 = 3\alpha + \beta - 1 \\ \rightarrow c_2 = \frac{3\alpha+\beta}{2} - 1/2 \end{cases}$$

La soluzione è dunque

$$y(x) = \left(\frac{3}{10} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{-3x} + \left(\frac{3\alpha+\beta}{2} - 1/2\right)e^{-x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x.$$

(ii) La soluzione è periodica se i due esponenziali spariscono, cioè se

$$\begin{cases} \frac{3}{10} - \frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \rightarrow \alpha+\beta = 3/5 \rightarrow 1-2\alpha = 3/5 \rightarrow \boxed{\alpha = 1/5} \\ \frac{3\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \beta = 1-3\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = 1 - 3\alpha = 1 - 3/5 = 2/5}.$$