COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Analisi Matematica II (EA)

14 luglio 2014

Esercizio 1 (7 punti)
Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ per i quali il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (\alpha x^2 z - 2xy^2, -\beta y x^2, x^3)$$

è conservativo. Per tali valori di α e β si determini poi un potenziale di $\vec{F}$.

Risultati: $\alpha = 3$, $\beta = 2$. | $\varphi(x,y,z) = x^3 z - x^2 y^2 + \text{cost}$.

Calcoli:

Imponiamo che si annulli il rotore di $\vec{F}$ (che è un campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$, insieme semplicemente connesso: dunque avere rotore nullo equivale ad essere conservativo). Si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -4xy, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -2\beta yx \Rightarrow \underline{\beta = 2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \alpha x^2, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \underline{\alpha = 3}.$$

Cerchiamo un potenziale di $F(x,y,z) = (3x^2z - 2xy^2, -2yx^2, x^3)$.

Si deve avere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 z - 2xy^2 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^3 z - x^2 y^2 + g(y,z).$$

Quindi

$$-2yx^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2x^2 y + \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = k(z).$$

Infine

$$x^3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^3 + k'(z) \Rightarrow k'(z) = 0 \Rightarrow k(z) = \text{cost}.$$

La famiglia di potenziali cercata è dunque data da

$$\varphi(x,y,z) = x^3 z - x^2 y^2 + \text{cost}.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si determini la natura dei punti stazionari in $\mathbf{R}^2$ della funzione $f(x,y) = y^3 - 2x^2 + xy - \frac{1}{4}y$. Si determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(\frac{1}{2},1)$.

Risultati: $\boxed{\left(-\frac{1}{12},-\frac{1}{3}\right) \text{ max. rel};\ \left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right) \text{ sella.}}$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Max. assoluto } 7/8, \text{ in } (1/4,1). \\ \text{Min. assoluto } -1/12\sqrt{3}, \text{ in } (0,\frac{1}{2\sqrt{3}}) \text{ e } (\frac{1}{4\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}).\end{array}}$

Calcoli:

Cerchiamo i punti stazionari. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x+y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+x-\frac{1}{4}$, dunque

$$\begin{cases} -4x+y=0 \\ 3y^2+x-1/4=0 \end{cases} \Rightarrow x = y/4 \Rightarrow 3y^2+y/4-1/4=0 \Rightarrow y = \frac{-1/4 \mp \sqrt{1/16+3}}{6} = \frac{-\frac{1}{4}\mp\frac{7}{4}}{6},$$

quindi $y=-\frac{1}{3}$, $x=-\frac{1}{12}$ e $y=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{16}$.

L'hessiano vale

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H\left(-\tfrac{1}{12},-\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \underline{\text{max. rel}} \ (\det H>0, \text{ traccia } H<0)$$

$$H\left(\tfrac{1}{16},\tfrac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \to \underline{\text{sella}} \ (\det H<0)$$

Il triangolo è composto dai tre segmenti $S_1=\{(0,y)\mid 0\le y\le 1\}$, $S_2=\{(x,1)\mid 0\le x\le 1/2\}$, $S_3=\{(x,2x)\mid 0\le x\le 1/2\}$.

Dunque su S_1 la funzione f vale $g_1(y)=y^3-1/4\,y$, e $g_1'(y)=3y^2-1/4$ si annulla per $y=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (e $y=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, che però è fuori intervallo).

Su S_2 la funzione f vale $g_2(x)=-2x^2+x+3/4$, e $g_2'(x)=-4x+1$, che si annulla per $x=1/4$. Su S_3 la funzione f vale $g_3(x)=8x^3-\frac{1}{2}x$, e $g_3'(x)=24x^2-1/2$, che si annulla per $x=\frac{1}{4\sqrt{3}}$ (e $x=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$, che però è fuori intervallo).

Si tratta dunque di confrontare

$$f(0,0)=0, \quad f(0,1)=3/4, \quad f(1/2,1)=3/4$$

$$f\left(0,\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{12\sqrt{3}}, \quad f(1/4,1)=\frac{7}{8}, \quad f\left(\tfrac{1}{4\sqrt{3}},\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

(nel punto stazionario $(\frac{1}{16},\frac{1}{4})$, che è interno al triangolo, sappiamo che c'è un punto di sella, quindi né di massimo relativo né di minimo relativo).

Il massimo assoluto è $7/8$, in $(1/4,1)$.

Il minimo assoluto è $-1/12\sqrt{3}$, in $(0,\frac{1}{2\sqrt{3}})$ e $(\frac{1}{4\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}})$.

Esercizio 3 (8 punti)

Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_K xy\sin z\, dxdydz$, ove

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 0 \le x \le \sqrt{\pi}, 0 \le y \le \sqrt{\pi}, 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$

Risultato: $\boxed{\iiint_K xy \sin z\, dxdydz = \frac{\pi^2}{4} + 1.}$

Calcoli:

L'insieme K è il solido di base il quadrato $[0,\sqrt{\pi}]\times[0,\sqrt{\pi}]$ e al di sotto del grafico $z = x^2+y^2$.

Si può integrare per fili:

$$\iiint_K xy\sin z\, dxdydz = \int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^{x^2+y^2} xy \sin z\, dz =$$

$$= -\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_0^{\sqrt{\pi}} dy\; xy\left[\cos(x^2+y^2) - 1\right] = \int_0^{\sqrt{\pi}} x\,dx \int_0^{\sqrt{\pi}} y\,dy - \int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \left[xy\cos(x^2+y^2)\right] =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi}} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} x\, \frac{1}{2}\sin(x^2+y^2)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{\pi}} dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2+\pi)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\cos(x^2+\pi)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4}\cos(x^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\cos(2\pi) - \frac{1}{4}\cos\pi - \frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 1.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso del campo vettoriale $\vec{v}$ attraverso la superficie S), ove $\vec{v}=(zx, zy, xy)$, S è il bordo di Q non contenuto nei piani $\{x=0\}$, $\{y=0\}$, $\{z=0\}$, $\{z=1\}$ e

$$Q=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x\geq 0, y\geq 0, 0\leq z\leq 1, x^2+y^2+z^2\leq 4\}$$

(si scelga la normale orientata verso l'alto).

Risultato: $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{7}{8}(\pi+1).$

Calcoli:

Q è la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 2, contenuta nel primo ottante e al di sotto del piano $z=1$.

La superficie S dunque può essere parametrizzata come grafico di $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, al variare di (x,y) all'interno del cerchio di raggio 2, ma all'esterno della regione del piano x,y in cui $z=\sqrt{4-x^2-y^2}\geq 1$, cioè del cerchio $x^2+y^2\leq 3$; poi va imposto anche $x\geq 0$ e $y\geq 0$.

Riassumendo: S è parametrizzata come $(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2})$, con (x,y) in C, la parte di corona circolare di raggio interno $\sqrt{3}$ e raggio esterno 2 contenuta nel quadrante $x\geq 0, y\geq 0$.

Il vettore normale per un grafico è $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, cioè per $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ si ha $\vec{N}=\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)$ (che punta verso l'alto).

Si deve quindi calcolare ($\vec{n}\,dS=\vec{N}\,dx\,dy$, poiché $dS=\|\vec{N}\|\,dx\,dy\ldots$)

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_C \left(\sqrt{4-x^2-y^2}\,x, \sqrt{4-x^2-y^2}\,y, xy\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_C (x^2+y^2+xy)\,dx\,dy \underset{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\sqrt{3}}^{2} (\rho^2+\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\sqrt{3}}^{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\theta\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{\pi+1}{2}\left(\frac{16-9}{4}\right) = \frac{7}{8}(\pi+1).$$

[Siccome si deve avere $x\geq 0$ e $y\geq 0$, si deve imporre $\theta\in[0,\pi/2]$.]