Esercizio 1 (8 punti). Fissato $r > 0$, calcolate il volume del cilindro troncato C così definito:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in Q,\ 0 \le z \le x + r,\ 0 \le z \le 2r - x\}$$

dove Q è il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \le r\}$.

Risultato

$$\boxed{\mathrm{Vol}(C) = \tfrac{23}{12} r^3}$$

Soluzione. L'insieme C è dato dalla porzione del cilindro di base Q compresa fra i piani

$$z = 0, \qquad z = x + r, \qquad z = 2r - x.$$

Gli utlimi due piani si incontrano lungo la retta di equazioni $z = 3r/2, x = r/2$, cf. la Figura 1.

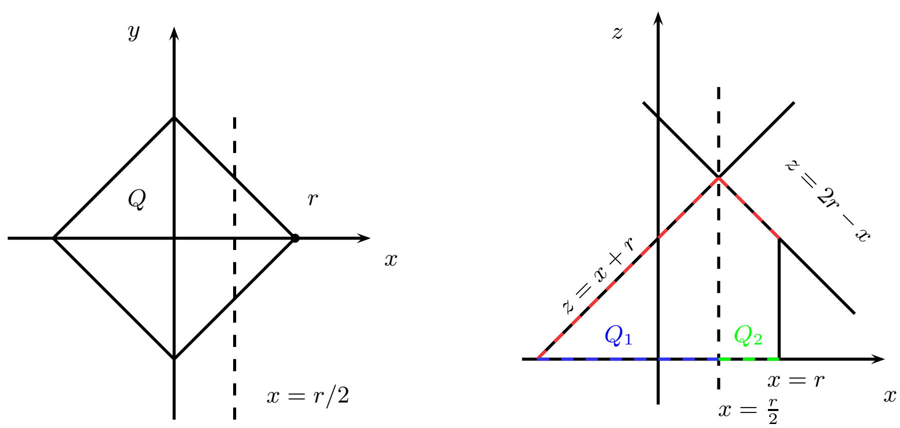


FIGURE 1. Il quadrato Q nel piano x, y e la proiezione dei tre piani assegnati sul piano x, z

Perciò, posto

$$Q_1 = \{(x, y) \in Q \colon x < r/2\}, \quad Q_2 = \{(x, y) \in Q \colon x > r/2\}$$

si ha

$$\mathrm{Vol}(C) = \iiint_C dxdydz = \iint_{Q_1} \left(\int_0^{x+r} dz \right) dxdy + \iint_{Q_2} \left(\int_0^{2r-x} dz \right) dxdy = \iint_{Q_1} (x+r) dxdy + \iint_{Q_2} (2r-x) dxdy$$

Calcoliamo questi integrali doppi integrando per fili verticali nel piano x, y. Come si evince dal disegno nella Figura 2 si avrà

$$\begin{aligned}
\iint_{Q_1} (x + r) dxdy &= \int_{x=-r}^{x=0} \left(\int_{y=-(x+r)}^{y=x+r} (x + r) dy \right) dx + \int_{x=0}^{x=\frac{r}{2}} \left(\int_{y=-(r-x)}^{y=r-x} (x + r)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-r}^{0} 2(x + r)^2\, dx + \int_0^{\frac{r}{2}} 2(r^2 - x^2)\, dx \\
&= \frac{2}{3}(x + r)^3 \Big|_{x=-r}^{x=0} + 2r^2 \cdot \frac{r}{2} - \frac{2}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=\frac{r}{2}} = \frac{2}{3} r^3 + r^3 - \frac{2}{3 \cdot 8} r^3 \\
&= \frac{1}{3 \cdot 8}(16 + 24 - 2) r^3 = \frac{38}{24} r^3
\end{aligned}$$

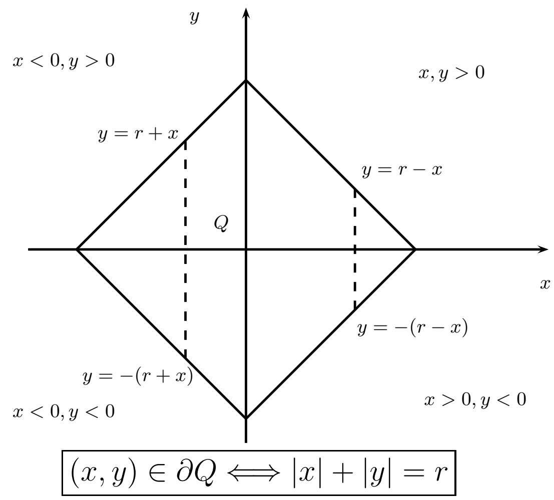


FIGURE 2. Il bordo del quadrato Q

Analogamente, per il secondo addendo si ha

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{Q_2} (2r - x) dx dy &= \int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(\int_{-(r-x)}^{r-x} (2r - x)\, dy \right) dx \\
&= 2 \int_{\frac{r}{2}}^{r} (2r - x)(r - x) dx = 2 \int_{\frac{r}{2}}^{r} (x^2 - 3rx + 2r^2) dx \\
&= 2\, \frac{x^3}{3} \Bigg|_{x=\frac{r}{2}}^{x=r} - 2 \cdot 3r \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{x=\frac{r}{2}}^{r} + 2 \cdot 2r^2 \cdot \frac{r}{2} \\
&= \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 8} r^3 - 6r \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} r^2 + 2r^3 = \frac{1}{24}(14 - 54 + 48) r^3 = \frac{8}{24} r^3
\end{aligned}$$

Sommando otteniamo

$$\mathrm{Vol}(C) = \frac{38}{24} r^3 + \frac{8}{24} r^3 = \frac{46}{24} r^3 = \frac{23}{12} r^3.$$

$\square$

Esercizio 2 (7 punti). Data la funzione $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 + z$

(i) Si determinino i suoi punti stazionari, e si dica che tipo sono.

(ii) Si determinino il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluti in

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Risultati

$(0,0,1/6)$ punto di sella	$\max\limits_D f = 2.05, \quad \min\limits_D f = -4$

Soluzione. La funzione è infinitamente differenziabile: infatti, è un polinomio. Il gradiente di f

$$\nabla f(x,y,z) = (4x, 2y, -6z+1)$$

si annulla solo nel punto $(0,0,1/6)$. Questo è un punto di sella perché la matrice hessiana (costante)

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $4, 2, -6$, dunque ne ha due di segno discorde. Questo risponde alla domanda (i). Venendo al problema di ottimizzazione (ii), introduciamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 + z - \lambda(x^2 + 4y^2 + z^2 - 1)$$

Per il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, i punti critici di f lungo il bordo ∂D dell'ellissoide D sono i punti critici (liberi) della lagrangiana, per i quali si ha

$$\begin{cases} \partial_x \mathcal{L} = 2(2-\lambda)x & = 0 \\ \partial_y \mathcal{L} = 2(1-4\lambda)y & = 0 \\ \partial_z \mathcal{L} = (1 - 2(3+\lambda)z) & = 0 \\ \partial_\lambda \mathcal{L} = -(x^2 + 4y^2 + z^2 - 1) & = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda = 2$, la prima equazione è soddisfatta. Inserendo questo moltiplicatore nella seconda e nella terza equazione si ottiene rispettivamente $y = 0$ e $z = 1/10$. Imponendo il vincolo (cioè, usando la quarta equazione) si ricava che $x^2 = 99/100$, il che dà i due punti critici vincolati P_+, P_-

$$\left(\frac{3}{10}\sqrt{11}, 0, \frac{1}{10}\right), \left(-\frac{3}{10}\sqrt{11}, 0, \frac{1}{10}\right).$$

Se $\lambda = 1/4$, allora è la seconda equazione ad esser soddisfatta e si ricava (dalla prima e dalla terza) che $x = 0$, $z = 2/13$. Dal vincolo segue che $y^2 = (1/4)\cdot(165/169)$ sicché si trovano altri due punti critici vincolati Q_+, Q_-

$$\left(0, \frac{\sqrt{165}}{26}, \frac{2}{13}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{165}}{26}, \frac{2}{13}\right).$$

Se λ è diverso sia da 2 che da $1/4$, le prime due equazioni sono soddisfatte esclusivamente se $x = y = 0$. Il fatto che in tal caso $z^2 = 1$ si ricava poi dal vincolo. In questo modo si ha una terza coppia R_+, R_-

$$(0,0,1), (0,0,-1).$$

Valutando f nei punti critici vincolati che abbiamo determinato si ottiene $f(P_\pm) = \frac{41}{20}$, $\quad f(Q_\pm) = \frac{17}{52}$, $f(R_+) = -2$, $\quad f(R_-) = -4$. Pertanto[1]

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \frac{41}{20} = 2.05, \qquad \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -4.$$

$\square$

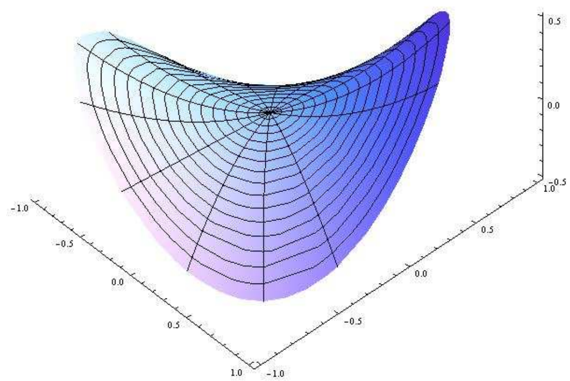
[1] Il valore $f(0,0,1/6) = 1/12$ non può essere né il massimo né il minimo di f in D perché $(0,0,1/6)$ è un punto di sella per la funzione f, *interno* a D.

Esercizio 3 (8 punti). Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z) = (z, -x, y)$,

(i) scegliendo un'orientazione a piacere, si determini il suo integrale curvilineo sulla frontiera della superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1, z = xy\}$;

(ii) si enunci il teorema del rotore (o teorema di Stokes);

(iii) si verifichi la sua validità calcolando direttamente l'integrale del flusso di rot $\vec{v}$ attraverso S.



Risultato

$-\pi$

Soluzione. La superficie S è data dalla porzione della superficie cartesiana esplicita $z = xy$ contenuta nel cilindro circolare unitario verticale $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(i) Diamo al bordo $\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, z = xy\}$ di S l'orientazione indotta dalla sua parametrizzazione $\vec{r}(\theta) = \big(\cos\theta, \quad \sin\theta, \quad \cos\theta\sin\theta\big)$. Verifichiamo che questa è una parametrizzazione regolare. Difatti $\vec{r}$ è una funzione C^∞ e la velocità $\|\vec{r}\,'(\theta)\| = \big\|\big(-\sin\theta, \quad \cos\theta, \quad \cos 2\theta\big)\big\| = \sqrt{1 + \cos^2 2\theta}$ non si annulla per alcun $\theta \in [0, 2\pi]$. In questo modo si induce un'orientazione su ∂S per cui

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}\,'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos\theta\sin\theta, \quad -\cos\theta, \quad \sin\theta\big) \cdot \big(-\sin\theta, \quad \cos\theta, \quad \cos 2\theta\big)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big[-\sin^2\theta\cos\theta - \cos^2\theta + \sin\theta\cos 2\theta\big] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big[-\sin^2\theta\cos\theta - \cos^2\theta + \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\big] d\theta \\
&= \Big[-\frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{\sin\theta\cos\theta + \theta}{2} - \frac{\cos^3\theta}{3} - \frac{2\cos\theta + \cos\theta\sin^2\theta}{3}\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\pi.
\end{aligned}$$

(ii) Il teorema afferma che, data una superficie regolare orientabile $S \subset \mathbb{R}^3$, un campo vettoriale $\vec{v}$ di classe C^1 in un intorno aperto di S in $\mathbb{R}^3$, ed un campo continuo $\vec{n}$ di versori normali ad S si ha

$$(*) \qquad \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$$

con la convenzione che l'integrale curvilineo di seconda specie nel membro a sinistra è calcolato sulla frontiera ∂S orientata in modo coerente con $\vec{n}$.

(iii) Conveniamo di scegliere

$$\vec{n}(x,y,xy) = \frac{\big(-y, \quad -x, \quad 1\big)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

La parametrizzazione della frontiera proposta nel punto (i) è coerente con questa scelta e si ha $\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\pi$. Verifichiamo che pure

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\pi.$$

A tal fine, calcoliamo il rotore. È

$$\mathrm{rot}\vec{v}(x,y,z) = \big(\partial_y v_z - \partial_z v_y, \quad \partial_z v_x - \partial_x v_z, \quad \partial_x v_y - \partial_y v_x\big) = \big(1, \quad 1, \quad -1\big), \quad \text{per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

da cui segue che

$$\mathrm{rot}\vec{v}(x,y,z) \cdot \vec{n}(x,y,z) = \frac{\big(-x, \quad -y, \quad 1\big)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \big(1, \quad 1, \quad -1\big) = -\frac{(x+y+1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \text{per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

La superficie S è il grafico della funzione $g(x,y) = xy$. Gli integrali superficiali su S contengono dunque l'elemento d'area

$$\sqrt{1+(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

Passando alle coordinate polari del piano nell'integrale doppio si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \left[-\frac{(x+y+1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right] dS &= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x+y+1) dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 [\rho(\cos\theta+\sin\theta)+1]\rho\, d\rho\, d\theta \\
&= -\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\right)}_{=0}\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right) - 2\pi\int_0^1 \rho\, d\rho = -2\pi\, \frac{\rho^2}{2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = -\pi.
\end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 4 (7 punti). Si effettuano infiniti lanci (indipendenti) di una moneta che dà testa con probabilità p e croce con probabilità $q = 1 - p$. Per i primi X lanci ($X \geq 1$) il lancio dà lo stesso esito, dopodiché il lancio produce l'altro risultato esattamente per Y volte ($Y \geq 1$). Determinare la legge congiunta e le leggi marginali (ossia la densità congiunta e le densità marginali) del vettore aleatorio (X, Y) e calcolare la speranza di X.

Risultati

$$\boxed{\begin{gathered} p_{(X,Y)}(m,n) = p^{m+1}q^n + p^n q^{m+1}, \\ p_X(m) = p^m q + pq^m, \\ p_Y(n) = p^2 q^{n-1} + p^{n-1}q^2 \end{gathered}} \qquad \boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}}$$

Soluzione. Per calcolare la densità congiunta conviene condizionare l'esito del primo lancio. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = m, Y = n) &= \mathbb{P}(X = m, Y = n | \text{“testa al primo lancio”})\mathbb{P}(\text{“testa al primo lancio”}) \\ &\quad + \mathbb{P}(X = m, Y = n | \text{“croce al primo lancio”})\mathbb{P}(\text{“croce al primo lancio”}) \\ &= p^{m-1} \cdot q^n \cdot p \cdot p + q^{m-1} \cdot p^n \cdot q \cdot q = p^{m+1}q^n + p^n q^{m+1} \end{aligned}$$

per ogni $m, n \geq 1$. Disponendo della congiunta, ora possiamo determinare rapidamente le marginali: è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(p^{m+1}q^n + p^n q^{m+1}\right) = p^{m+1} \sum_{n=1}^{+\infty} q^m + q^{m+1} \sum_{n=1}^{+\infty} p^m \\ &= p^{m+1} \frac{q}{1-q} + q^{m+1} \frac{p}{1-p} = p^m q + pq^m, \end{aligned}$$

per ogni $m \geq 1$, e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(p^{m+1}q^n + p^n q^{m+1}\right) \\ &= p\, q^n \sum_{m=1}^{+\infty} p^m + p^n\, q \sum_{m=1}^{+\infty} q^m = p\, q^n\, \frac{p}{1-p} + p^n\, q\, \frac{q}{1-q} = p^2 q^{n-1} + p^{n-1} q^2 \end{aligned}$$

per ogni $n \geq 1$. Si può usare la prima delle due per ricavare la speranza di X, precisamente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{\infty} m\, \mathbb{P}(X = m) &= \sum_{m=1}^{\infty} m\,(p^m q + pq^m) = pq \left(\sum_{m=1}^{\infty} m\, p^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m\, q^{m-1} \right) \\ &= pq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} p^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} q^m \right) = pq \left(\frac{\partial}{\partial p} \sum_{m=1}^{\infty} p^m + \frac{\partial}{\partial q} \sum_{m=1}^{\infty} q^m \right) \\ &= pq \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{1-p} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{q}{1-q} \right) = pq \left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \end{aligned}$$

$\square$