CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Siano $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$ e $f(x) = e^{-x}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ (definita per $x \neq 0$) è crescente è l'insieme dato da: $\boxtimes$ $x \leq \log \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $x \geq \log 2$; $\boxed{c}$ $x \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $x \geq 2 \log 2$.

2. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora: $\boxed{a}$ $f(0) > f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$; $\boxed{b}$ f non è limitata; $\boxed{c}$ f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$; $\boxtimes$ f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$.

3. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_3^{x^2+2} \frac{1}{t^2 - 2t}\, dt$, allora $f'(x) =$ $\boxed{a}$ $\frac{2}{x^3+3x}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{x^3+2x}$; $\boxed{c}$ $\frac{2}{x^3+x}$; $\boxed{d}$ $\frac{2}{x^3+4x}$.

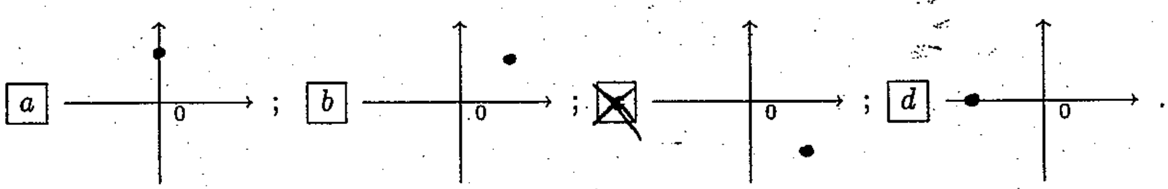
4. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1 - \cos(x^\alpha)}\, dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{c}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxtimes$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

5. Il limite $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 + n}{2n^2 + 1} \right)^n$ è uguale a: $\boxed{a}$ e; $\boxed{b}$ $\frac{1}{e}$; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxtimes$ 0.

6. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ è convergente, allora: $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ è divergente; $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ è convergente.

7. Siano $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ e $Q(x) = 2x - 1$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: $\boxed{a}$ $x^2 - x + 4/3$; $\boxed{b}$ $x^2 - x - 2$; $\boxed{c}$ $x^2 - x + 1/2$; $\boxtimes$ $x^2 - x$.

8. Il numero complesso $(-1 - i)^3$ è:



CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ è convergente, allora: $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente; $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, b_n^2$ è convergente; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente.

2. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_3^{x^2+2} \frac{1}{t^2-2t}\, dt$, allora $f'(x) =$ $\boxtimes$ $\frac{2}{x^3+2x}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{x^3+x}$; $\boxed{c}$ $\frac{2}{x^3+4x}$; $\boxed{d}$ $\frac{2}{x^3+3x}$.

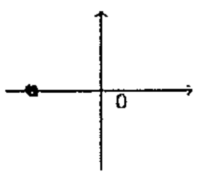
3. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1-\cos(x^\alpha)}\, dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{b}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxtimes$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{d}$ $1 < \alpha < 2$.

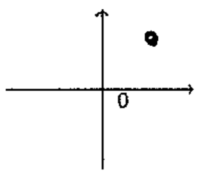
4. Siano $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ e $Q(x) = -2x + 1$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: $\boxed{a}$ $x^2 - x - 2$; $\boxtimes$ $x^2 - x + 1/2$; $\boxed{c}$ $x^2 - x$; $\boxed{d}$ $x^2 - x + 4/3$.

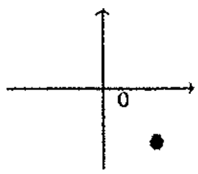
5. Siano $g(y) = \frac{y^2+2}{2y}$ e $f(x) = e^{x/2}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ è crescente è l'insieme dato da: $\boxtimes$ $x \geq \log 2$; $\boxed{b}$ $x \leq \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$; $\boxed{c}$ $x \geq 2\log 2$; $\boxed{d}$ $x \leq \log\frac{1}{2}$.

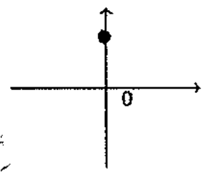
6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$: Allora: $\boxed{a}$ f non è limitata; $\boxtimes$ f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{c}$ f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{d}$ $f(0) < f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

7. Il numero complesso $(1 + \sqrt{3}i)^3$ è:

$\boxtimes$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. Il limite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^n$ è uguale a: $\boxed{a}$ $\frac{1}{e}$; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{c}$ 0; $\boxtimes$ e.

CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Siano $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ e $Q(x) = 2x - 1$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: $\boxed{a}$ $x^2 - x - 2$; $\boxed{b}$ $x^2 - x + 1/2$; $\boxed{\times}$ $x^2 - x$; $\boxed{d}$ $x^2 - x + 4/3$.

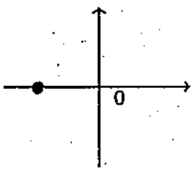
2. Il limite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^n$ è uguale a: $\boxed{a}$ $\frac{1}{e}$; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{\times}$ e.

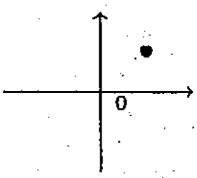
3. Siano $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$ e $f(x) = e^{x/2}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ (definita per $x \neq 0$) è decrescente è l'insieme dato da: $\boxed{a}$ $x \geq \log 2$; $\boxed{b}$ $x \leq \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$; $\boxed{\times}$ $x \geq 2\log 2$; $\boxed{d}$ $x \leq \log\frac{1}{2}$.

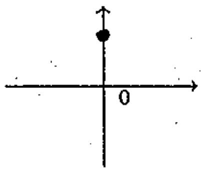
4. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente, allora: $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente; $\boxed{\times}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ è convergente; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente.

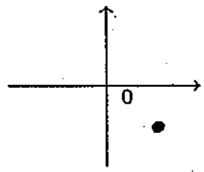
5. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x^2 e^{2x}}{\sin(x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{\times}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{c}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{d}$ $1 < \alpha < 2$.

6. Il numero complesso $(-1+i)^3$ è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{\times}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

7. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora: $\boxed{a}$ f non è limitata; $\boxed{\times}$ f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{c}$ f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{d}$ $f(0) < f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

8. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_3^{x^2+2} \frac{1}{t^2-4}\,dt$, allora $f'(x) =$ $\boxed{a}$ $\frac{2}{x^3+2x}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{x^3+x}$; $\boxed{\times}$ $\frac{2}{x^3+4x}$; $\boxed{d}$ $\frac{2}{x^3+3x}$.

CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

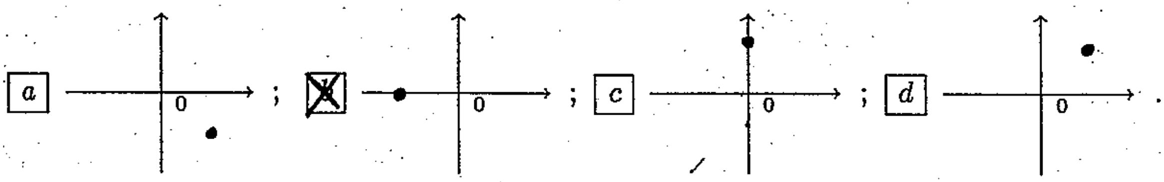
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora: $\boxed{a}$ f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{\cancel{b}}$ f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{c}$ $f(0) > f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$; $\boxed{d}$ f non è limitata.

2. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x\cos(2x)}{\log(1+x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{b}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{\cancel{c}}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

3. Siano $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ e $Q(x) = -2x + 1$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: $\boxed{\cancel{a}}$ $x^2 - x + 1/2$; $\boxed{b}$ $x^2 - x$; $\boxed{c}$ $x^2 - x + 4/3$; $\boxed{d}$ $x^2 - x - 2$.

4. Il numero complesso $(1 + \sqrt{3}i)^3$ è:



5. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{b_n}$ sono convergenti, allora: $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente; $\boxed{\cancel{b}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ è convergente; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente.

6. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2 - t}\,dt$, allora $f'(x) =$ $\boxed{\cancel{a}}$ $\frac{2}{x^3+x}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{x^3+4x}$; $\boxed{c}$ $\frac{2}{x^3+3x}$; $\boxed{d}$ $\frac{2}{x^3+2x}$.

7. Il limite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+n}\right)^n$ è uguale a: $\boxed{\cancel{a}}$ $+\infty$; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ e; $\boxed{d}$ $\frac{1}{e}$.

8. Siano $g(y) = \frac{y^2+2}{2y}$ e $f(x) = e^{-x}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ è decrescente è l'insieme dato da: $\boxed{\cancel{a}}$ $x \leq \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $x \geq 2\log 2$; $\boxed{c}$ $x \leq \log\frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $x \geq \log 2$.

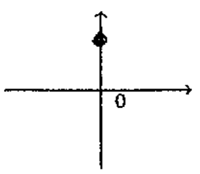
CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

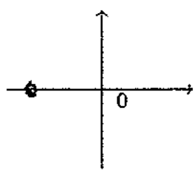
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

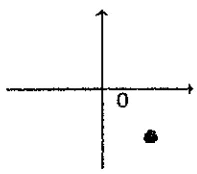
1. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2-1}\,dt$, allora $f'(x) =$ [a] $\frac{2}{x^3+4x}$; [b] $\frac{2}{x^3+3x}$; [X] $\frac{2}{x^3+2x}$; [d] $\frac{2}{x^3+x}$.

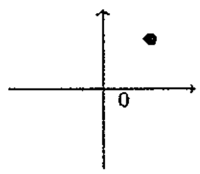
2. Siano $P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 3$ e $Q(x) = -x + 1$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: [a] $x^2 - x$; [b] $x^2 - x + 4/3$; [X] $x^2 - x - 2$; [d] $x^2 - x + 1/2$.

3. Il numero complesso $(\sqrt{3} + i)^3$ è:

[X] 

; [b] 

; [c] 

; [d] 

.

4. Il limite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1}\right)^n$ è uguale a: [a] 0; [b] e; [X] $\frac{1}{e}$; [d] $+\infty$.

5. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora: [a] f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$; [b] $f(0) < f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$; [c] f non è limitata; [X] f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$.

6. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x \log(2+x)}{1-\cos(x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: [a] $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; [b] $1 < \alpha < 2$; [X] $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; [d] $2 < \alpha < 3$.

7. Siano $g(y) = \frac{y^2+2}{2y}$ e $f(x) = e^{x/2}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ è crescente è l'insieme dato da: [a] $x \geq 2\log 2$; [b] $x \leq \log \frac{1}{2}$; [X] $x \geq \log 2$; [d] $x \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$.

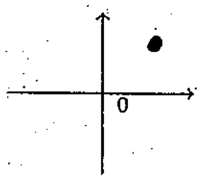
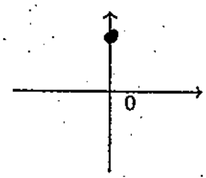
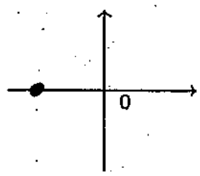
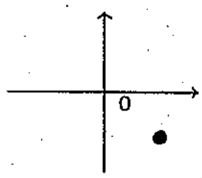
8. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente, allora: [X] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ è convergente; [b] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente; [c] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente; [d] $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente.

CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x^2 e^{2x}}{\sin(x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: [a] $1 < \alpha < 2$; [b] $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; [X] $2 < \alpha < 3$; [d] $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2. Il numero complesso $(\sqrt{3} + i)^3$ è:

[a]  ; [X]  ; [c]  ; [d]  .

3. Il limite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{2n^2+1}\right)^n$ è uguale a: [a] e; [b] $\frac{1}{e}$; [c] $+\infty$; [X] 0.

4. Siano $g(y) = \frac{y^2+2}{2y}$ e $f(x) = e^{-x}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ è decrescente è l'insieme dato da: [a] $x \le \log\frac{1}{2}$; [b] $x \ge \log 2$; [X] $x \le \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$; [d] $x \ge 2\log 2$.

5. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_3^{x^2+2} \frac{1}{t^2-4}\,dt$, allora $f'(x) =$ [a] $\frac{2}{x^3+3x}$; [b] $\frac{2}{x^3+2x}$; [c] $\frac{2}{x^3+x}$; [X] $\frac{2}{x^3+4x}$.

6. Siano $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ e $Q(x) = 3x + 2$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: [X] $x^2 - x + 4/3$; [b] $x^2 - x - 2$; [c] $x^2 - x + 1/2$; [d] $x^2 - x$.

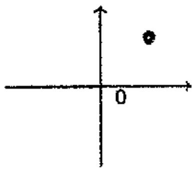
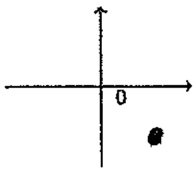
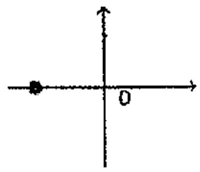
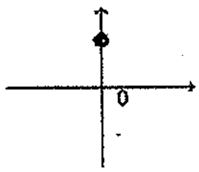
7. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono convergenti, allora: [a] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente; [b] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente; [c] $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente; [X] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ è convergente.

8. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \le 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora: [a] $f(0) > f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$; [b] f non è limitata; [c] f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$; [X] f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$.

CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Il numero complesso $(-1+i)^3$ è:

$\boxtimes$  ; [b]  ; [c]  ; [d]  .

2. Siano $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$ e $f(x) = e^{-x}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ (definita per $x \neq 0$) è crescente è l'insieme dato da: [a] $x \leq \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$; [b] $x \geq 2\log 2$; $\boxtimes$ $x \leq \log\frac{1}{2}$; [d] $x \geq \log 2$.

3. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{b_n}$ sono convergenti, allora: [a] $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente; $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, b_n^2$ è convergente; [c] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente; [d] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente.

4. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora: [a] f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$; $\boxtimes$ f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$; [c] $f(0) > f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$; [d] f non è limitata.

5. Siano $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ e $Q(x) = 3x + 2$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: [a] $x^2 - x + 1/2$; [b] $x^2 - x$; $\boxtimes$ $x^2 - x + 4/3$; [d] $x^2 - x - 2$.

6. Il limite $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+n}\right)^n$ è uguale a: $\boxtimes$ $+\infty$; [b] 0; [c] e; [d] $\frac{1}{e}$.

7. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2-1}\,dt$, allora $f'(x) =$ [a] $\frac{2}{x^3+x}$; [b] $\frac{2}{x^3+4x}$; [c] $\frac{2}{x^3+3x}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{x^3+2x}$.

8. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x\log(2+x)}{1-\cos(x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: [a] $2 < \alpha < 3$; [b] $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; [c] $1 < \alpha < 2$; $\boxtimes$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

CALCOLO 1		15 gennaio 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

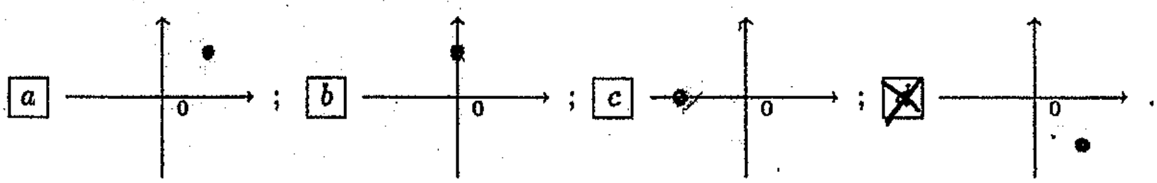
1. Il limite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^n$ è uguale a: $\boxed{a}$ 0; $\boxed{b}$ e; $\boxtimes$ $\frac{1}{e}$; $\boxed{d}$ $+\infty$.

2. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{a_n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono convergenti, allora: $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ è convergente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ è divergente.

3. Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua, derivabile e tale che $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in[0,+\infty)$. Allora: $\boxed{a}$ f ha un valore massimo in $[0,+\infty)$; $\boxed{b}$ $f(0) < f(x)$ per ogni $x\in(0,+\infty)$; $\boxed{c}$ f non è limitata; $\boxtimes$ f ha un valore minimo in $[0,+\infty)$.

4. Se, per $x > 0$, $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2-t}\,dt$, allora $f'(x) =$ $\boxed{a}$ $\frac{2}{x^3+4x}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{x^3+3x}$; $\boxed{c}$ $\frac{2}{x^3+2x}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{x^3+x}$.

5. Il numero complesso $(-1-i)^3$ è:



6. Siano $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$ e $f(x) = e^{x/2}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g\circ f)(x)$ (definita per $x\neq 0$) è decrescente è l'insieme dato da: $\boxtimes$ $x\geq 2\log 2$; $\boxed{b}$ $x\leq \log\frac{1}{2}$; $\boxed{c}$ $x\geq\log 2$; $\boxed{d}$ $x\leq\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$.

7. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x\cos(2x)}{\log(1+x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1<\alpha<\frac{3}{2}$; $\boxtimes$ $1<\alpha<2$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}<\alpha<1$; $\boxed{d}$ $2<\alpha<3$.

8. Siano $P(x) = -x^3+2x^2+x-3$ e $Q(x) = -x+1$. Indicata la divisione di $P(x)$ rispetto a $Q(x)$ come $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, il polinomio $S(x)$ è dato da: $\boxed{a}$ x^2-x; $\boxed{b}$ $x^2-x+4/3$; $\boxtimes$ x^2-x-2; $\boxed{d}$ $x^2-x+1/2$.

CALCOLO I	15 gennaio 2008

1. (6 punti)
Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \log(2+x)\}$$

attorno all'asse y.

Come sappiamo dalla teoria, il volume in questione è dato da

$$V = 2\pi \int_0^1 x \log(2+x)\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per parti}}}{=} 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \log(2+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{2+x}\,dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{2+x}\,dx \right).$$

Eseguendo la divisione si ha:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^2+2x} & x-2 \\ = -2x & \\ \underline{\ \ -2x-4} & \\ \ \ = +4 & \end{array} \quad \Rightarrow \frac{x^2}{2+x} = x - 2 + \frac{4}{2+x}.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2+x}\,dx = \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{4}{2+x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\log(2+x) \right] \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 + 4\log 3 - 4\log 2 = -\frac{3}{2} + 4\log 3 - 4\log 2.$$

In conclusione

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \left(-3/2 + 4\log 3 - 4\log 2 \right) \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} \log 3 + \frac{3}{4} - 2\log 3 + 2\log 2 \right) =$$

$$= \frac{3\pi}{2} - 3\pi \log 3 + 4\pi \log 2.$$

CALCOLO I	15 gennaio 2008

2. (6 punti)
Si disegni qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2+x} & \text{per } x \geq 0 \\ x^3 + 2x^2 + 1 & \text{per } x < 0 \end{cases} .$$

In particolare, se ne determinino i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$, gli eventuali asintoti obliqui, la crescenza e la decrescenza, la convessità e la concavità, e se è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

Si ha $f(0) = e^0 = 1$, e $\lim_{x\to 0^-} (x^3+2x^2+1) = 1$, per cui f è continua per $x_0 = 0$. Poi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-2x^2+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x(2x-1)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3+2x^2+1) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + 2/x + 1/x^3\right) = -\infty .$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1+2/x+1/x^3\right) = +\infty ,$$ <u>non</u> c'è asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

Ancora

$$f'(x) = e^{-2x^2+x}(-4x+1) \quad \text{per } x > 0, \qquad f'(x) = 3x^2+4x \quad \text{per } x<0,$$

per cui f cresce per $0 \le x < 1/4$ e per $x < -4/3$, decresce per $x > 1/4$ e $-4/3 < x < 0$. Si ha anche $f'(1/4) = 0$, $f'(-4/3) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, per cui $f(x)$ <u>non</u> è derivabile per $x_0 = 0$.

Infine

$$f''(x) = e^{-2x^2+x}(-4x+1)^2 - 4\cdot e^{-2x^2+x} = e^{-2x^2+x}\left(16x^2-8x-3\right) \quad \text{per } x>0,$$

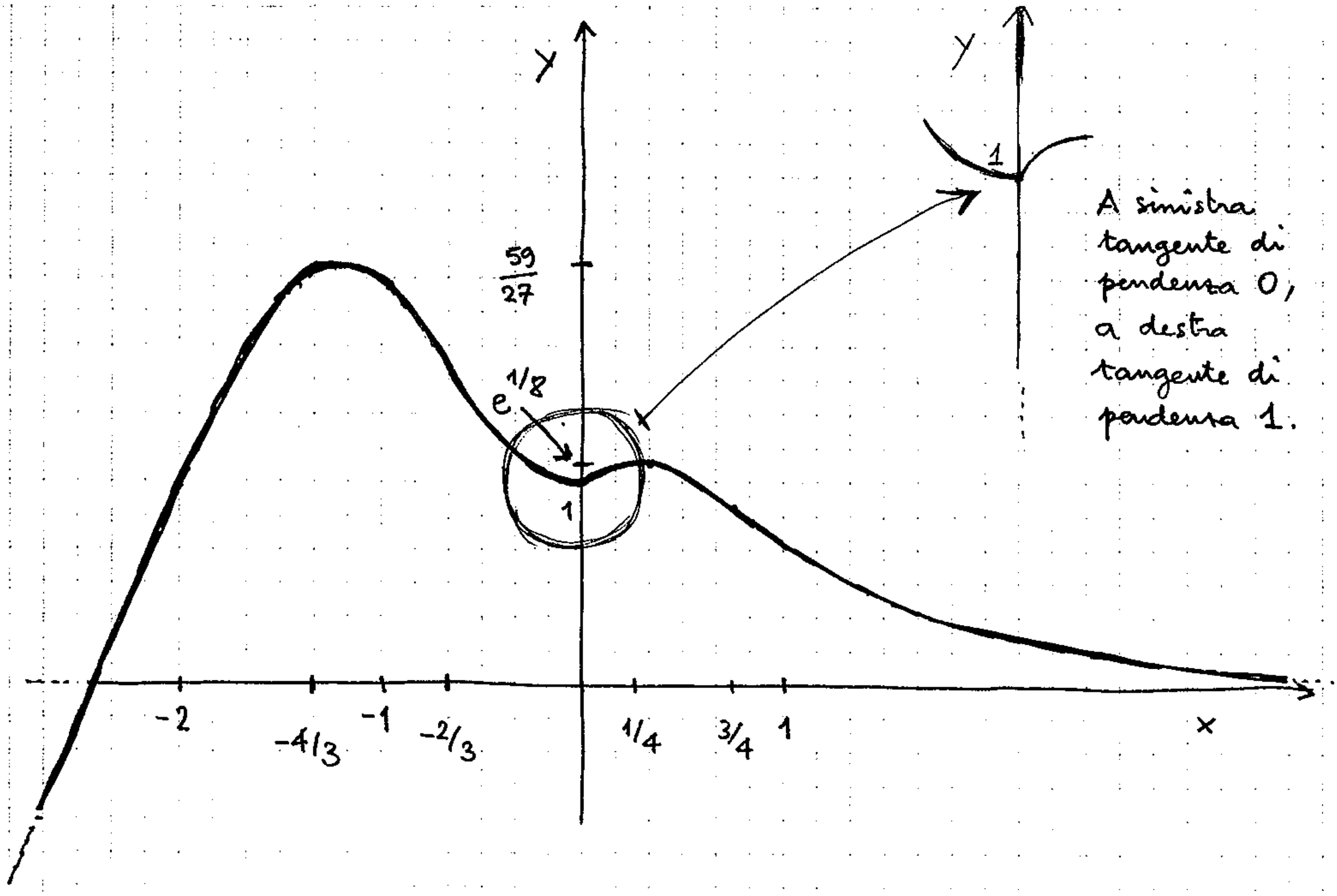
$$f''(x) = 6x+4 \quad \text{per } x<0,$$

per cui $f''(x) > 0$ per $-2/3 < x < 0$ e dove $16x^2-8x-3 > 0$ (per $x>0$).
Dunque, trovando le radici di $16x^2-8x-3$:

$$x = \frac{4 \mp \sqrt{16+48}}{16} = \frac{4\mp 8}{16} = \begin{cases} -1/4 \text{ (fuori regione)} \\ 3/4 \end{cases},$$

si conclude $f''(x) > 0$ per $x > 3/4$; invece $f''(x) < 0$ per $0 < x < 3/4$ e $x < -2/3$. Così $f(x)$ è convessa per $-2/3 < x < 0$ e $x > 3/4$, ed è concava per $x < -2/3$ e $0 < x < 3/4$.

Si ha anche $f(-4/3) = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} + 1 = \frac{59}{27}$, $f(1/4) = e^{-1/8+1/4} = e^{1/8}$.



y
59/27
e^{1/8}
1
-2
-4/3
-1
-2/3
1/4
3/4
1
x
y
1
A sinistra tangente di pendenza 0, a destra tangente di pendenza 1.

CALCOLO I	15 gennaio 2008

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = -2\sin(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti, non-omogenea.
Per risolvere l'omogenea si cercano le radici del polinomio associato:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad , \quad r = 3 \mp \sqrt{9-9} = 3, \text{ doppia.}$$

Dunque la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

La soluzione particolare $\hat{y}(x)$ della non-omogena avrà la forma $\hat{y}(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$, per cui $\hat{y}' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)$ e $\hat{y}'' = -9A\sin(3x) - 9B\cos(3x)$. Dunque

$$-9A\cancel{\sin}(3x) - 9B\cancel{\cos}(3x) - 6\cdot 3A\cos(3x) + 6\cdot 3B\sin(3x) + \\ + 9A\cancel{\sin}(3x) + 9B\cancel{\cos}(3x) = -2\sin(3x),$$

da cui $A = 0$ e $B = -1/9$.

La soluzione generale è allora

$$y(x) = y_0(x) + \hat{y}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} - \frac{1}{9}\cos(3x).$$

Imponendo i dati di Cauchy, poiché $y' = 3c_1 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}\sin(3x)$, si ha

$$\begin{cases} c_1 - 1/9 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/9 \\ c_2 = 1 - 3c_1 = 1 - 1/3 = 2/3 \end{cases},$$

cioè:

$$y(x) = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{2}{3}x e^{3x} - \frac{1}{9}\cos(3x).$$