ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	16 febbraio 2017

1. (6 punti) Disegnare la regione piana definita da:

$$D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le \sqrt{3},\ x^3 - x \le y \le \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \arctan x \right\}$$

e calcolarne l'area.

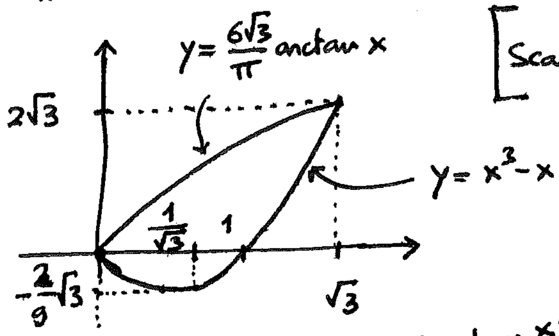
La cubica $x^3 - x$ si annulla in $x=0$, $x=1$ e $x=-1$. È una funzione dispari, negativa per $0<x<1$ e positiva per $x>1$. Per $x=\sqrt{3}$ vale $(\sqrt{3})^3 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

La funzione $\arctan x$ è dispari, si annulla per $x=0$, $\underbrace{\text{e per } x=\sqrt{3}}$ è positiva per $x>0$, e per $x=\sqrt{3}$ vale $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, quindi $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\arctan x$ per $x=\sqrt{3}$ vale $2\sqrt{3}$.

La figura è quindi

[Scale diverse in x e y!]

[La derivata di $x^3 - x$ è $3x^2 - 1$, e si annulla in $x = \pm 1/\sqrt{3}$. La cubica $x^3 - x$ in $1/\sqrt{3}$ vale $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$.]



L'area di D è data da

per parti $\int \arctan x\,dx = \int 1 \cdot \arctan x\,dx \ldots$

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{6\sqrt{3}}{\pi} \arctan x - x^3 + x \right) dx = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left[x \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx \right] - \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left(\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2}\,dx \right) - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} =$$

[ponendo $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$ si deve integrare $\frac{1}{1+t}$, la cui primitiva è $\log|1+t| \ldots$]

$$= 6 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \log(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\log 4 = \frac{21}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\log 2.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	16 febbraio 2017

2. **(6 punti)** Si determinino, se esistono, i punti e i valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 9x + \frac{27}{16} & \text{per } x \leq -\frac{3}{2} \\ 4x^3 + 12x^2 - 3x^4 & \text{per } x > -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4x^3+12x^2-3x^4) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2+9x+\frac{27}{16}\right) = -\infty$. [I termini dominanti sono $-3x^4$ e x^3.]

Dunque $f(x)$ <u>non</u> ha minimi assoluti.

Si ha

$$f(-3/2) = \left(x^3+6x^2+9x+\frac{27}{16}\right)_{|x=-3/2} = -\frac{27}{8} + \cancel{6}^{3}\frac{9}{\cancel{4}_2} - 9\frac{3}{2} + \frac{27}{16} = -\frac{27}{16},$$

$$\lim_{x\to-3/2^+} f(x) = \lim_{x\to-3/2^+}(4x^3+12x^2-3x^4) = -\cancel{4}\frac{27}{\cancel{8}_2} + \cancel{12}^{3}\frac{9}{\cancel{4}} - 3\frac{81}{16} = \frac{27}{2} - \frac{9\cdot 27}{16} = -\frac{27}{16}.$$

Dunque $f(x)$ è continua in $-3/2$, e $f(-3/2) = -\frac{27}{16}$.

Per $x < -3/2$ si ha $f'(x) = 3x^2+12x+9 = 3(x^2+4x+3)$, che si annulla per $x = -2 \mp\sqrt{4-3} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$. Dunque f cresce per $x<-3$, decresce per $-3<x<-3/2$. (si noti che -1 è fuori della semiretta $x<-3/2$).

Per $x > -3/2$ si ha $f'(x) = 12x^2+24x-12x^3 = 12x(-x^2+x+2)$, che si annulla per $x=0$ e per $x = \frac{1\mp\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$. Dunque il fattore $12x$ è positivo per $x>0$, mentre il fattore $(-x^2+x+2)$ è positivo per $-1<x<2$. In conclusione f cresce per $-3/2<x<-1$ e per $0<x<2$, decresce per $-1<x<0$ e per $x>2$.

Quindi -3 è punto di massimo relativo, $-3/2$ è punto di minimo relativo, -1 è punto di massimo relativo, 0 è punto di minimo relativo e 2 è punto di massimo relativo.

Poi si ha $f(-3) = -27+6\cdot 9 - 9\cdot 3 + \frac{27}{16} = \frac{27}{16}$; $f(-3/2) = -\frac{27}{16}$; $f(-1) = -4+12-3 = 5$; $f(0) = 0$; $f(2) = 4\cdot 8 + 12\cdot 4 - 3\cdot 16 = 32$, e quindi 2 è punto di <u>massimo assoluto</u>.

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	16 febbraio 2017

3. (6 punti) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) = 1 + \sin(\sqrt{2}\,x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 2° ordine, a coefficienti costanti, non-omogenea.
La soluzione generale dell'omogenea si trova determinando le radici del polinomio associato $r^2+2=0$, cioè $r=\pm i\sqrt{2}$. Tutte le soluzioni dell'omogenea sono quindi

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + c_2 \cos(\sqrt{2}x).$$

Una soluzione particolare della non-omogenea è la somma di una soluzione particolare con secondo membro 1 e di una soluzione particolare con secondo membro $\sin(\sqrt{2}x)$.
La prima è del tipo $y_{*,1}(x) = A$, e quindi viene $A = 1/2$.
La seconda è del tipo $y_{*,2}(x) = [B \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + C\cos(\sqrt{2}x)]\,x$ (la moltiplicazione per il fattore x è <u>necessaria</u>, perché il termine fra parentesi quadre è soluzione dell'omogenea!).
Dunque si ha:

$$y'_{*,2}(x) = B\sin(\sqrt{2}x) + C\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x)\,x - \sqrt{2}C\sin(\sqrt{2}x)\,x$$

$$y''_{*,2}(x) = \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}C\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}C\sin(\sqrt{2}x) - $$
$$- 2B\sin(\sqrt{2}x)x - 2C\cos(\sqrt{2}x)x\,.$$

Così $y''_{*,2}(x) + 2y_{*,2}(x) = 2\sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x) - 2\sqrt{2}C\sin(\sqrt{2}x)$ e imponendo l'uguaglianza con $\sin(\sqrt{2}x)$ viene $B=0$ e $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
La soluzione generale della non-omogenea è dunque

$$y(x) = c_1\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + c_2\cos(\sqrt{2}x) + 1/2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}x\cos(\sqrt{2}x).$$

Dunque $y'(x) = \sqrt{2}c_1\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}c_2\sin(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}\,x\sin(\sqrt{2}x)$, e imponendo i dati di Cauchy si ha:

$$\begin{cases} 0 = c_2 + 1/2 \longrightarrow c_2 = -1/2 \\ 0 = \sqrt{2}c_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \longrightarrow c_1 = 1/4 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{4}\sin(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}x\cos(\sqrt{2}x)}.$$