ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	16 luglio 2014

1. (6 punti) Disegnare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{2 - x^3}\,.$$

In particolare, si determinino: insieme di definizione, limiti agli estremi del dominio di definizione, regioni di crescenza/decrescenza, regioni di convessità/concavità, asintoti, eventuali punti di massimo relativo o di minimo relativo.

La funzione è definita quando il denominatore non si annulla, cioè $x^3 \neq 2$, cioè $x \neq \sqrt[3]{2}$. Si ha poi $f(x)=0$ per $x=0$.

Si ha, facilmente:

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

La retta $x=\sqrt[3]{2}$ è un asintoto verticale, la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale.

Derivando si ha:

$$f'(x) = \frac{2-x^3-x(-3x^2)}{(2-x^3)^2} = 2\,\frac{x^3+1}{(2-x^3)^2}\,,$$

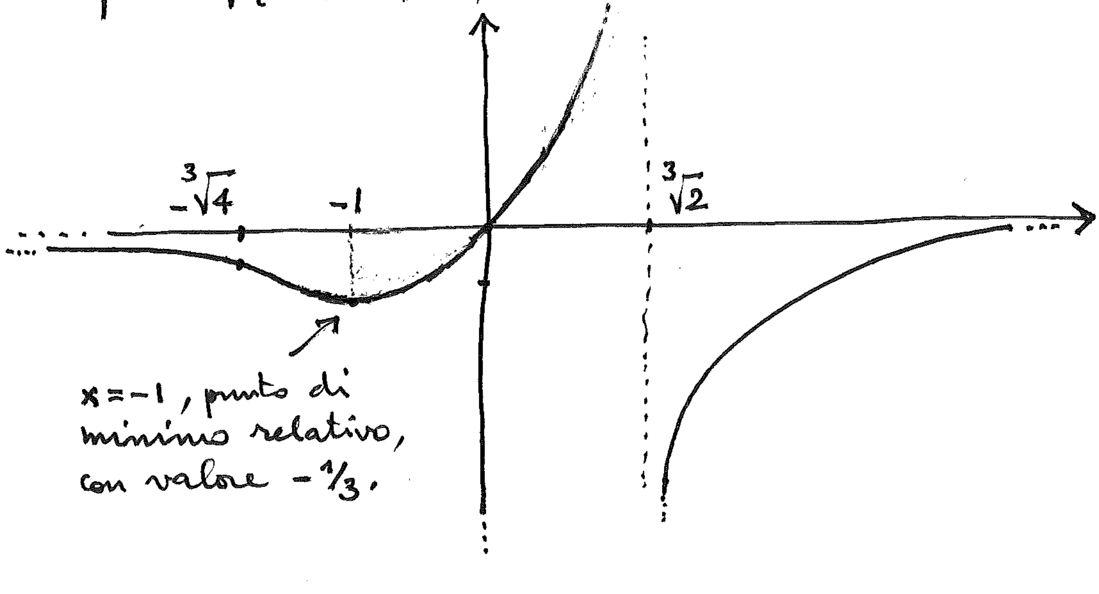
e $f'(x)>0$ per $x>-1$, $f'(x)<0$ per $x<-1$, $f'(x)=0$ per $x=-1$.

Derivando ancora si ha:

$$f''(x) = 2\,\frac{3x^2(2-x^3)^{\cancel{2}} - (x^3+1)\,2\,\cancel{(2-x^3)}(-3x^2)}{(2-x^3)^{\cancel{4}\,3}} = 6x^2\,\frac{2-x^3+2x^3+2}{(2-x^3)^3} = 6x^2\,\frac{4+x^3}{(2-x^3)^3}\,,$$

per cui $f''(x)>0$ per $-\sqrt[3]{4}<x<\sqrt[3]{2}$, $f''(x)<0$ per $x<-\sqrt[3]{4}$ e $x>\sqrt[3]{2}$, $f''(x)=0$ per $x=-\sqrt[3]{4}$.

La funzione quindi è crescente per $x>-1$, decrescente altrove; convessa per $-\sqrt[3]{4}<x<\sqrt[3]{2}$, concava altrove. Si ha $f(-1)=-1/3$.



2. (6 punti) Sia $\beta > \frac{1}{5}$. Si calcoli

$$\int_e^{e^\beta} \frac{1}{x - 25x(\log x)^2} dx\,.$$

Si determini quindi β in modo tale che l'integrale sia uguale a $\frac{1}{10}$.

Ponendo $t = \log x$, $x = e^t$, $dx = e^t\,dt$, $x = e$ per $t = 1$, $x = e^\beta$ per $t = \beta$, si ha

$$\int_e^{e^\beta} \frac{1}{x - 25x(\log x)^2} dx = \int_1^\beta \frac{1}{e^t - 25e^t t^2} e^t\,dt = \int_1^\beta \frac{1}{1-25t^2} dt =$$

$$= \int_1^\beta \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1/25 - t^2} dt = -\frac{1}{25} \int_1^\beta \left(\frac{A}{t - 1/5} + \frac{B}{t + 1/5}\right) dt\,.$$

Per determinare A e B si impone

$$\frac{A}{t - 1/5} + \frac{B}{t + 1/5} = \frac{At + A/5 + Bt - B/5}{(t^2 - 1/25)} = \frac{1}{t^2 - 1/25}\,,$$

cioè $A + B = 0$ e $A - B = 5$, dunque $A = 5/2$, $B = -5/2$.

Si ha dunque:

$$\ldots = -\frac{1}{25} \int_1^\beta \left(\frac{5/2}{t - 1/5} - \frac{5/2}{t + 1/5}\right) dt = -\frac{1}{10} \log(t - 1/5)\Big|_1^\beta + \frac{1}{10} \log\left(t + \frac{1}{5}\right)\Big|_1^\beta =$$

$$= \frac{1}{10} \log \frac{(\beta + 1/5)/6/5}{(\beta - 1/5)/4/5} = \frac{1}{10} \log\left(\frac{2}{3} \frac{\beta + 1/5}{\beta - 1/5}\right).$$

L'integrale è uguale a $\frac{1}{10}$ se

$$\log\left(\frac{2}{3} \frac{\beta + 1/5}{\beta - 1/5}\right) = 1 \iff \frac{2}{3} \frac{\beta + 1/5}{\beta - 1/5} = e \iff \beta + 1/5 = \frac{3}{2} e (\beta - 1/5) \iff$$

$$\iff \left(\frac{3}{2} e - 1\right)\beta = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{3}{2} e\right) \iff \beta = \frac{1}{5} \frac{e + 2/3}{e - 2/3}\,.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	16 luglio 2014

3. (6 punti) [Si usi la formula di Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$ quando $n \to \infty$.] (i) Determinare tutti i valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(e^{1-x^2})^n$ è convergente. (ii) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la serie che si ottiene quando x è sul bordo dell'insieme di convergenza. Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha$ è convergente?

(i) Indicando $t = e^{1-x^2}$, si ha una serie di potenze in t. Il raggio di convergenza è dato da

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n} \overset{\text{Stirling}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)^{n+1}}\sqrt{2\pi n}\,\cancel{n^n}\,\cancel{e^{-n}}}{\sqrt{2\pi(n+1)}\,\cancel{(n+1)^{n+1}}\,e^{-n-1}\,\cancel{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\,\frac{1}{e^{-1}} = e, \quad \text{quindi } r = 1/e.$$

La serie dunque converge per $e^{1-x^2} < 1/e$, cioè per $2-x^2<0$, cioè per $x<-\sqrt{2}$ e $x>\sqrt{2}$.

Resta da verificare che cosa accade per $x^2=2$. La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{\text{Stirling}}{\approx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ che è divergente.}$$

(ii) Abbiamo dunque visto che $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$. Quindi $a_n n^\alpha \approx \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}$, e questo dà luogo a una serie convergente per $\frac{1}{2}-\alpha>1$, cioè $\alpha < -1/2$.