ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	17 febbraio 2016

1. **(6 punti)** Presentando i calcoli necessari a fornire la risposta, determinate il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x^2-x+2} & \text{in } \{x \le 0\} \cup \{x \ge 4\} \\ \frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x + 1 & \text{in } \{0 < x < 4\}. \end{cases}$$

Si ha $f(0) = 1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-x}{x^2-x+2}$, $f(4) = \frac{-2}{14} = -\frac{1}{7} = \lim_{x\to 4^+} \frac{2-x}{x^2-x+2}$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x+1) = 1$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (\frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x+1) = \frac{16}{7} - \frac{24}{7} + 1 = -\frac{1}{7}$.

Dunque f è continua in $\mathbb{R}$. Poi

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2-x}{x^2-x+2} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2-x}{x^2-x+2} = 0.$$

[Per una generalizzazione del teorema di Weierstrass, è dunque certo che f ha massimo assoluto e minimo assoluto in $\mathbb{R}$.]

[Siccome $x^2-x+2 > 0$ (il discriminante $b^2-4ac = 1-8 = -7$ è negativo), il segno di f è >0 per $x<0$ e <0 per $x>4$.
Siccome $\frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x + 1 = \frac{1}{7}(x^2-6x+7)$ si annulla per $x = 3 \mp \sqrt{9-7} = 3 \mp \sqrt{2}$, si ha che per $0 \le x < 3-\sqrt{2}$ risulta $f(x) > 0$, e per $3-\sqrt{2} < x \le 4$ risulta $f(x) < 0$. Queste informazioni sul segno non sono "necessarie", ma possono aiutare ad avere una visione completa del problema...]

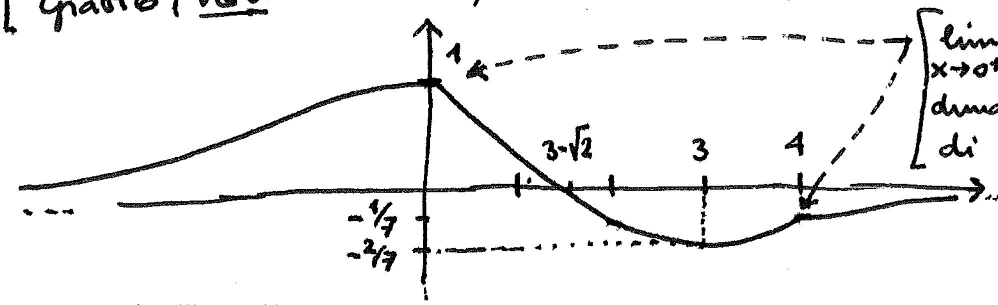
Facciamo la derivata: per $x<0$ e $x>4$ si ha [$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 4^+} f'(x)$]

$$f'(x) = \frac{(-1)(x^2-x+2) - (2-x)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x^2-x+2)^2} > 0 \quad (\text{per } x<0 \text{ e } x>4)$$

Dunque f cresce per $x<0$ e $x>4$. Per $0<x<4$ si ha $f'(x) = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$, che è >0 per $x>3$. Dunque f decresce per $0<x<3$ e cresce per $3<x<4$.

In conclusione, f <u>cresce</u> per $-\infty < x < 0$, <u>decresce</u> per $0<x<3$, <u>cresce</u> per $x>3$, e si deduce che 0 è punto di massimo assoluto con valore 1, 3 è punto di minimo assoluto con valore $\frac{1}{7}9 - \frac{6}{7}3 + 1 = -\frac{2}{7}$.

[Grafico (<u>non</u> richiesto; scala diversa per ascisse ed ordinate)



[$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -6/7$, $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \frac{2}{7}$, dunque si hanno due punti di non derivabilità in 0 e 4.
]

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	17 febbraio 2016

2. **(6 punti)** Determinate l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^n$, $x \neq -2$. Per ogni x appartenente all'insieme di convergenza determinate quindi la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^n$.

Ponendo $t = \frac{x-2}{x+2}$, si ha la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} n t^n$. Il raggio di convergenza è dato da $r = 1/L$, ove

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{a_n = n}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Longrightarrow r = 1/L = 1.$$

Dunque la serie converge per $|t|<1$, e per $t = \pm 1$ si ha che il termine generale $n \cdot 1^n$ o $n(-1)^n$ non è infinitesimo, per cui la serie non converge.

Va dunque stabilito per quali $x \neq -2$ si ha $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| < 1$. Questo è equivalente a $|x-2| < |x+2|$, cioè $-|x+2| < x-2 < |x+2|$.

Se $x > -2$ si ha $|x+2| = x+2$, dunque $-x-2 < x-2 < x+2$, cioè $2x > 0$ e $0 < 4$, cioè $x > 0$.

Se $x < -2$ si ha $|x+2| = -x-2$, dunque $-(-x-2) < x-2 < -x-2$, cioè $4 < 0$ e $2x < 0$, che è impossibile.

La serie dunque converge per $x > 0$.

Per calcolare la somma, notiamo che $nt^n = nt^{n-1} \cdot t = \left(\frac{d}{dt} t^n\right) t$.

Dunque (per $|t|<1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} t^n\right) t = t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} t^n\right) = t \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right) \underset{\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}\right)}{=} t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right) =$$

$$= t \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Essendo $t = \frac{x-2}{x+2}$, si è trovato (per $x > 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^n = \frac{x-2}{x+2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x-2}{x+2}\right)^2} = \frac{x-2}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{1}{\frac{(4)^2}{(x+2)^{\cancel{2}}}} = (x-2)(x+2)\frac{1}{16} = \frac{x^2-4}{16}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	17 febbraio 2016

3. **(6 punti)** Determinate

- per quali valori $\delta \in \mathbf{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{[\log(1+x)]^{\delta-1}}dx$ converge;
- per quali valori $\gamma \in \mathbf{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{[\log(1+x)]^{\gamma-1}(1-x)}dx$ converge;
- per quali valori $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0, 1$, l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(x-\alpha)}{[\log(1+x)]^{\beta-1}(1-x)^{3\alpha-1}}dx$ converge.

a) La funzione $\dfrac{x^2(1-x)}{[\log(1+x)]^{\delta-1}}$ può essere illimitata solo per $x \to 0^+$.

Dunque si deve valutare il suo comportamento per $x \to 0^+$. Si ha:

$$\underset{\text{per } x\in[0,1]}{0 \leq} \frac{x^2(1-x)}{[\log(1+x)]^{\delta-1}} \sim \frac{x^2}{x^{\delta-1}} \text{ (poiché } 1-x \sim 1 \text{ e } \log(1+x) \sim x) = \frac{1}{x^{\delta-3}}.$$

Dunque l'integrale improprio converge per $\delta-3<1$, cioè $\delta<4$ (avendo applicato il criterio di confronto asintotico).

b) La funzione $\dfrac{x}{[\log(1+x)]^{\gamma-1}(1-x)}$ può essere illimitata per $x\to 0^+$ ed è illimitata per $x \to 1^-$. Dunque si deve valutare il suo comportamento sia per $x\to0^+$ che per $x \to 1^-$. Si ha

* $x \to 0^+$ $\quad 0 \leq \dfrac{x}{[\log(1+x)]^{\gamma-1}(1-x)} \sim \dfrac{x}{x^{\gamma-1}} = \dfrac{1}{x^{\gamma-2}}$, convergente per $\gamma-2<1$, cioè $\gamma<3$.

per $x\in[0,1]$

* $x \to 1^-$ $\quad 0 \leq \dfrac{x}{[\log(1+x)]^{\gamma-1}(1-x)} \sim \dfrac{1}{(\log 2)^{\gamma-1}(1-x)}$, divergente perché compare al denominatore $(1-x)$ con esponente 1.

Dunque per qualunque $\gamma \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio è divergente.

c) Come nel caso b), si deve valutare l'integrale improprio per $x\to0^+$ e per $x\to1^-$.

* $x\to0^+$ $\quad \dfrac{x(x-\alpha)}{[\log(1+x)]^{\beta-1}(1-x)^{3\alpha-1}} \sim \dfrac{(-\alpha)x}{x^{\beta-1}\cdot 1} = (-\alpha)\dfrac{1}{x^{\beta-2}}$, convergente per $\beta-2<1$, cioè $\beta<3$

(il segno di $(x-\alpha)$ è >0 per $\alpha<0$ e $x\to0^+$, <0 per $\alpha>0$ e $x\to0^+$: dunque la funzione assegnata ha segno costante per $x\to0^+$, e si può applicare il criterio di confronto asintotico).

* $x\to1^-$ $\quad \dfrac{x(x-\alpha)}{[\log(1+x)]^{\beta-1}(1-x)^{3\alpha-1}} \sim \dfrac{1\cdot(1-\alpha)}{(\log 2)^{\beta-1}(1-x)^{3\alpha-1}}$, convergente per $3\alpha-1<1$, cioè $\alpha<2/3$.

(il segno di $(x-\alpha)$ è >0 per $1-\alpha>0$, cioè $\alpha<1$, e <0 per $\alpha>1$: dunque la funzione assegnata ha segno costante per $x\to1^-$),