COGNOME NOME Matr.

Analisi Matematica II (Amb–Civ)

17 novembre 2012

Esercizio 1 (7 punti) Sia $s > 0$ e per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si consideri il campo vettoriale $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\|\mathbf{x}\|^{-s}$.

(i) Si determini il suo insieme di definizione;

(ii) Si determini per quale valore s si ha rot $\mathbf{q} = 0$ e div $\mathbf{q} = 0$.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(\mathbf{q}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}$$

$$\boxed{\text{div } \mathbf{q} = 0 \text{ per } s = 3, \quad \text{rot } \mathbf{q} = 0 \text{ per ogni } s > 0}$$

Soluzione. La formula che definisce il campo vettoriale

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{-s}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s}{2}}} & \frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s}{2}}} & \frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s}{2}}} \end{pmatrix}$$

ha senso per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$, cioè ogniqualvolta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$. Questo risponde al punto (i).

Determiniamo per quali valori di s il campo assegnato è solenoidale: a tal fine calcoliamo la divergenza

$$\mathrm{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{q}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{q}^3}{\partial x_3}.$$

Ad esempio il primo addendo dà

$$\frac{\partial \mathbf{q}^1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s}{2}} - x_1 \cdot \frac{s}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s-2}{2}} \cdot 2x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^s} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^s} - s\frac{x_1^2}{\|\mathbf{x}\|^{s+2}}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial x_2} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^s} - s\frac{x_2^2}{\|\mathbf{x}\|^{s+2}}, \qquad \frac{\partial \mathbf{q}^3}{\partial x_3} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^s} - s\frac{x_3^2}{\|\mathbf{x}\|^{s+2}},$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Pertanto

$$\mathrm{div}\,\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^s} - s\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{\|\mathbf{x}\|^{s+2}} = \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^s} - s\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^s} = (3-s)\|\mathbf{x}\|^{-s}$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Ne segue che $\mathbf{q}$ è solenoidale se e soltanto se $s = 3$.

Siccome il campo assegnato è radiale ci si aspetta che esso sia irrotazionale, qualunque sia il valore di s. Calcoliamo le componenti del rotore

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{q} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \mathbf{q}^1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{q}^3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{q}^1}{\partial x_2}\right)$$

Ad esempio, la prima componente vale

$$\frac{\partial \mathbf{q}^3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial x_3} = -\frac{s}{2}\frac{x_3 \cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s+2}{2}}} + \frac{s}{2}\frac{x_2 \cdot 2x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{s+2}{2}}} = 0,$$

qualunque sia $s > 0$. Analogamente si ha

$$\frac{\partial \mathbf{q}^1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{q}^3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{q}^1}{\partial x_2} = 0,$$

per ogni $s > 0$.

In alternativa si può notare che, in notazione tensoriale, la $k-$esima componente del rotore è data da

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j \mathbf{q}^k = \varepsilon_{ijk}\partial_j (x_l x_l)^{-\frac{s}{2}} x_k = (x_l x_l)^{-\frac{s}{2}}\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} - s(x_l x_l)^{-\frac{s+2}{2}}\varepsilon_{ijk}x_j x_k$$

dove è adottata la convenzione di Einstein per cui bisogna sommare sugli indici ripetuti. Dato che la contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico è nulla, ed essendo il tensore di Levi-Civita antisimmetrico, quanto sopra fa zero per ogni $k = 1, 2, 3$.

□

Esercizio 2 (8 punti) . Sia data la funzione $f(x,y) = e\log x + e^y - yx$.

(*i*) Si determini il suo insieme di definizione;

(*ii*) si determinino i suoi punti stazionari, e si dica di che tipo sono;

(*iii*) si determinino il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluto nell'insieme

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le \log x, 1 \le x \le e^2\Big\}$$

$\mathrm{Dom}(f) = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$	$(e,1)$ punto di sella	$\min\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} f(x,y) = 2e - e^2, \quad \max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} f(x,y) = 2e+1.$

Soluzione. (*i*) La formula che definisce f ha senso purché $x > 0$. Pertanto l'insieme massimale di definizione di f è

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\Big\} = (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

Inoltre, D è un insieme aperto dove f è infinitamente differenziabile, per composizione.

(*ii*) Per determinare i punti critici liberi di f osserviamo che

$$\nabla f(x,y) = \Big(e/x - y, e^y - x\Big) = (0,0) \iff \begin{cases} y = e/x, \\ e^y = x. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione del sistema nella prima otteniamo che $y = e^{1-y}$ da cui $\log y = 1 - y$. Pertanto (x,y) è un punto critico se e solo se $y = 1$ e $x = e$. Per discutere la natura del punto stazionario $(e,1)$, valutiamo la matrice hessiana

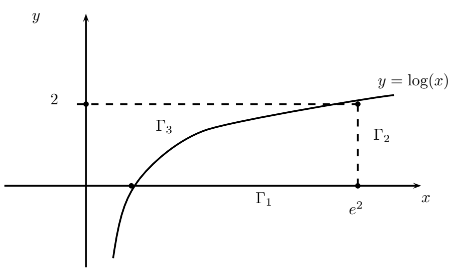
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e/x^2 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}$$

per $(x,y) = (e,1)$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1/e & -1 \\ -1 & e \end{pmatrix}$$

che ha determinante pari a -2. Questo implica che il punto $(e,1)$ è di sella per f.

(*iii*) Sia $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{(1,0),(e^2,0),(e^2,2)\}$, dove $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sono definiti come in figura.



- Punti critici vincolati a Γ_1: la derivata della funzione composta

  $$\frac{d}{dx} f(x,0) = \frac{d}{dx}(e\log(x) + 1) = e/x$$

  non si annulla per alcun $x \in (1,e^2)$.

- Punti critici vincolati a Γ_2: la derivata della funzione composta

  $$\frac{d}{dy} f(e^2,y) = \frac{d}{dy}(2e + e^y - e^2 y) = e^y - e^2$$

  non si annulla per alcun $y \in (0,2)$.

- Punti critici vincolati a Γ_3: la derivata della funzione composta con la parametrizzazione del grafico del logaritmo

  $$\frac{d}{dx} f(x,\log(x)) = \frac{d}{dx}(e\log(x) + x - x\log(x)) = e/x - \log(x)$$

  si annulla solo per $x = e \in (1,e^2)$.

Ricapitolando, sulla parte regolare del bordo $\partial\Omega$ la funzione f ha un unico punto critico vincolato $(e,1) \in \Gamma_3$, dove f vale

$$f(e,1) = e.$$

Viceversa, sui vertici $(1,0),(e^2,0),(e^2,2)$ del bordo, f assume rispettivamente i valori

$$f(1,0) = 1, \quad f(e^2,0) = 2e+1, \quad f(e^2,2) = 2e - e^2$$

Dalla disuguaglianza elementare

$$2e - e^2 - 1 = -(e-1)^2 < 0$$

segue che il minimo dei valori sopra elencati è dato da $2e - e^2$ mentre il massimo è dato da $2e+1$. In altre parole

$$\min_{(x,y)\in\overline{\Omega}} f(x,y) = f(e^2,2) = 2e - e^2, \qquad \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} f(x,y) = f(e^2,0) = 2e+1.$$

□

Esercizio 3 (8 punti). Si calcoli $\iiint\limits_K xydxdydz$ dove

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

$$\boxed{28/45}$$

Soluzione. Anzitutto indichiamo $K_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ il quarto di ellisse di semiassi 1,2 che si ottiene proiettando K sul piano $z = 0$. Integrando prima in dz ricaviamo

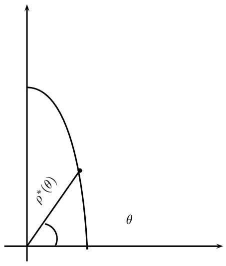
$$\iiint\limits_K xydxdydz = \int_{K_0} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} xydz \right) dxdy = \int_{K_0} xy \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dxdy = \int_{K_0} xy\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

Ora si tratta di calcolare l'integrale doppio su K_0.

Strategia 1 Passiamo alle coordinate polari del piano

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio K_0 in coordinate polari si scrive



$$D_0 = \{(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi) \colon 0 < \theta < \pi/2,\ \ 0 < \rho < \rho^*(\theta)\}$$

dove $\rho^*(\theta)$ è determinato ponendo

$$(\rho^*)^2 = x^2 + y^2 = 4 - 3x^2 = 4 - 3\cos^2\theta(\rho^*)^2 \Rightarrow (\rho^*)^2 = \frac{4}{1+3\cos^2\theta}$$

La trasformazione ha jacobiano $\mathrm{jac}(\rho,\theta) = \rho$. Pertanto

$$\int_{K_0} xy\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\rho^*(\theta)} \rho^2\cos\theta\sin\theta\,\rho{\cdot}\rho d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\int_0^{\rho^*(\theta)}\rho^4\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\frac{\rho^*(\theta)^5}{5}\, d\theta$$

Ci si è ridotti al calcolo dell'integrale

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\frac{\rho^*(\theta)^5}{5}\, d\theta = \frac{2^5}{5}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}}}\, d\theta = \frac{1}{-6}\frac{2^5}{5}\int_0^{\pi/2}\frac{-6\cos\theta\sin\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}}}\, d\theta = \left.\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{2^5}{5}\cdot\frac{2}{3}}{(1+3\cos\theta^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{28}{45}$$

Strategia 2 Si adopera la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases}$$

la quale ha jacobiano $\mathrm{jac}(\rho,\theta) = 2\rho$. Il dominio K_0, scritto in queste nuove coordinate, diventa un rettangolo $E_0 = (0,1)\times(0,\pi/2)$. Con questa strategia, la "complessità" del calcolo è scaricata sull'integrando che nelle nuove coordinate contiene una radice pari a

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + 4\rho^2\sin^2\theta} = \sqrt{\rho^2 + 3\rho^2\sin^2\theta} = \rho\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{K_0} xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{1}\rho^2\cos\theta(2\sin\theta)\cdot\rho\sqrt{1+3\sin^2\theta}\cdot(2\rho)d\rho d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}\int_0^1\rho^4 d\rho d\theta \\
&= \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}\int_0^1\rho^4 d\rho d\theta = \frac{28}{45}
\end{aligned}$$

Strategia 3 Un'ulteriore strategia può esser quella di continuare il conto senza cambiare coordinate ...

□

Esercizio 4 (7 punti). Da un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere si estrae una pallina. Se ne estrae poi una seconda, senza reimmettere la prima. Se le due palline estratte hanno lo stesso colore, si vince 1 €, altrimenti si perdono 2 €. Determinare speranza $\mathbb{E}[X]$ e varianza $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$ del guadagno X.

$\mathbb{E}[X] = -0.80$	$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 2.16$

Soluzione. Le probabilità che ambo le palline estratte abbiano lo stesso colore è pari a $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{10}$. La probabilità dell'evento complementare, cioè che le due palline estratte abbiano colori diversi, è $1 - 4/10 = 6/10$. La variabile aleatoria X vale 1 sul primo evento e -2 sull'altro. Quindi il suo valor medio è dato da

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{4}{10} - 2 \cdot \frac{6}{10} = -\frac{8}{10}$$

cioè chi gioca a questo gioco in media perde 80 centesimi. Per calcolare la varianza, conviene calcolarsi la speranza della variabile aleatoria X^2, che vale 1 sull'evento "le palline estratte hanno lo stesso colore" e 4 sull'evento complementare. Perciò

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot \frac{4}{10} + 4 \cdot \frac{6}{10} = \frac{28}{10}$$

In conclusione,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{28}{10} - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{280 - 64}{100} = \frac{216}{100} = 2.16$$

□