COGNOME ____ NOME ____ Matr. ____

Analisi Matematica II (EA)

18 gennaio 2011

Esercizio 1 (7 punti)

Si calcoli l'integrale curvilineo di $f(x,y,z) = xe^z + y$ sulla curva composta dai tre segmenti congiungenti $(0,1,0)$ a $(1,2,1)$, $(1,2,1)$ a $(1,2,0)$, $(1,2,0)$ a $(0,1,0)$.

Risultato: $e + \frac{5}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1$

Calcoli:

I tre segmenti hanno le parametrizzazioni: $\gamma_1(t) = (t, t+1, t)$, $\gamma_2(t) = (1,2,t)$, $\gamma_3(t) = (t, t+1, 0)$, sempre per $t \in [0,1]$. (Si ricordi che per calcolare l'integrale curvilineo di una funzione non è importante il verso in cui è percorsa la curva...)

Dunque $\gamma_1' = (1,1,1)$, $\|\gamma_1'\| = \sqrt{3}$; $\gamma_2' = (0,0,1)$, $\|\gamma_2'\| = 1$; $\gamma_3' = (1,1,0)$, $\|\gamma_3'\| = \sqrt{2}$.

L'integrale richiesto è quindi:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} f\, ds = \int_0^1 \left[(te^t + t + 1)\sqrt{3} + (e^t + 2)\cdot 1 + (te^0 + t + 1)\cdot\sqrt{2} \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{3}\, te^t + e^t + (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})t + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2} \right] dt = \text{[per parti il primo integrale...]}$$

$$= \sqrt{3}\left(te^t \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t dt \right) + e^t \Big|_{t=0}^{t=1} + (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{3}\,e - \sqrt{3}\, e^t \Big|_{t=0}^{t=1} + e - 1 + \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2} =$$

$$= \cancel{\sqrt{3}e} - \cancel{\sqrt{3}e} + \sqrt{3} + e - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2 = e + \frac{5}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcolino il massimo assoluto e il minimo assoluto di $g(x,y,z) = x^2 - 2z^2 + 2y^2$ sulla superficie

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 = 1\,,\ -1 \le y \le 2\right\}.$$

Risultato:

MAX ASSOLUTO:	MIN ASSOLUTO:
$9 = g(\mp 1, 2, 0)$	$-2 = g(0,0,\pm 1)$

Calcoli:

Si può scrivere la funzione g su C come $Q(x,y) = x^2 - 2(1-x^2) + 2y^2 = 3x^2 + 2y^2 - 2$, con $x \in [-1,1]$ e $y \in [-1,2]$: per esercizio...

Usiamo i moltiplicatori di Lagrange, esprimendo la superficie come luogo di zeri di $G(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1$.

Facendo le derivate ed uguagliandole a 0 si arriva al sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 4y = 0 \\ -4z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$\nearrow x = 0 \rightarrow z = \pm 1 \rightarrow \lambda = -2$

$\searrow \lambda = 1 \rightarrow z = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Abbiamo dunque trovato i punti $(0,0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0, 0)$. Si ha $g(0,0,\pm 1) = -2$, $g(\pm 1, 0, 0) = 1$.

Poi bisogna valutare la funzione sul bordo di C, cioè per $y = -1$ e $y = 2$. Per $y = -1$ si ha $g(x,-1,z) = x^2 - 2z^2 + 2$, che va valutata sulla circonferenza $x^2 + z^2 = 1$; per $y = 2$ si ha $g(x,2,z) = x^2 - 2z^2 + 8$, sempre valutata sulla circonferenza $x^2 + z^2 = 1$.

Siccome $g(x,2,z) = g(x,-1,z) + 6$, studiamo $g(x,-1,z)$. Valutata per $z^2 = 1 - x^2$, si ha $g(x,-1,1-x^2) = x^2 - 2(1-x^2) + 2 = 3x^2$, che per $x \in [-1,1]$ ha massimo in $x = \mp 1$ (e vale 3), e minimo per $x = 0$ (e vale 0). Si devono quindi confrontare i valori:

$g(0,0,\pm 1) = -2$, $g(\pm 1, 0, 0) = 1$, $g(\mp 1, -1, 0) = 3$, $g(0,-1,\pm 1) = 0$, $g(\mp 1, 2, 0) = 9$, $g(0,2,\pm 1) = 6$, e si deduce che il massimo assoluto è $9 = g(\mp 1, 2, 0)$ e il minimo assoluto è $-2 = g(0,0,\pm 1)$.

Esercizio 3 (8 punti)
Si calcoli l'integrale di $F(x,y,z) = xz$ in

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-z)^2 + y^2 \le z^2 + 1\,,\ 0 \le z \le 1\}\,.$$

Risultato: $\boxed{\dfrac{8\pi}{15}}$

Calcoli:

La sezione di K a quota z è un cerchio di centro $(z,0)$ e raggio $\sqrt{z^2+1}$. Dunque un modo efficiente di calcolare l'integrale richiesto è quello di integrare per strati.

Si ha

$$\iiint_K xz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{C((z,0),\sqrt{z^2+1})} xz\,dx\,dy =$$

[coordinate polari in x e y:
$x = z + \rho\cos\theta$, $\theta \in [0,2\pi]$
$y = \rho \operatorname{sen}\theta$, $\rho \in [0, \sqrt{1+z^2}]$]

$$= \int_0^1 dz \left[z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1+z^2}} d\rho \left(\rho\,(z + \rho\cos\theta) \right) \right] = \int_0^1 dz \left[z^2\, 2\pi \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho\, d\rho \right] =$$

poiché $\int_0^{2\pi} \cos\theta = 0$

$$= 2\pi \int_0^1 z^2 \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{1+z^2}} dz = 2\pi \int_0^1 z^2 \frac{(1+z^2)}{2}\,dz =$$

$$= \pi \left(\left.\frac{z^3}{3}\right|_{z=0}^{z=1} + \left.\frac{z^5}{5}\right|_{z=0}^{z=1} \right) = \pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}\,.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{v}(x,y,z) = (z, z, xy+z)$ attraverso la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z l'insieme

$$M = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \mid z = 2x^3+1\,, 0 \le x \le 1\}\,.$$

[Si scelga il versore normale che punta verso il basso, cioè con terza componente negativa.]

Risultato: $-\frac{9}{5}\pi$

Calcoli:

Parametrizziamo la superficie in coordinate polari ρ e θ. Nel piano (x,z) la variabile x esprime la distanza dall'asse di rotazione, dunque in $\mathbb{R}^3$ la relazione fra z e ρ è data da $z = 2\rho^3+1$. La parametrizzazione è dunque data da $\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\rho^3+1)$, $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Calcoliamo $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ (la direzione normale alla superficie):

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 6\rho^2\\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0\end{pmatrix} = \left(-6\rho^3\cos\theta, -6\rho^3\mathrm{sen}\,\theta, \rho\right).$$

Siccome punta verso l'alto ($\rho>0$!), cambiamolo di segno:

$\vec{N} = -\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (6\rho^3\cos\theta, 6\rho^3\mathrm{sen}\,\theta, -\rho)$. Il versore normale è dato da $\vec{n} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$, l'elemento d'area è $dS = \|\vec{N}\|\,d\rho\,d\theta$.

Dunque l'integrale richiesto è:

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\left[(2\rho^3+1)\,6\rho^3(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta) + (\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 2\rho^3+1)(-\rho)\right] =$$

$$= -2\pi\int_0^1(2\rho^4+\rho)\,d\rho = -2\pi\left(\frac{2}{5}\rho^5\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} + \frac{1}{2}\rho^2\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}\right) = -2\pi\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{9\pi}{5}.$$

poiché $\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = 0$