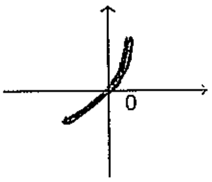
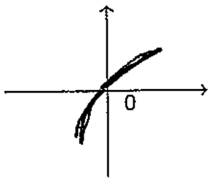
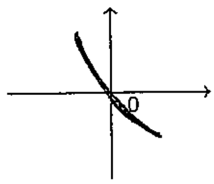
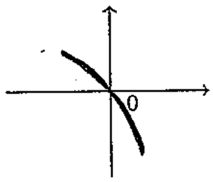
ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = -1$.

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2e^x}{xe^{2x} - x^2e^{-x}} =$ $\boxed{a}$ 2; $\boxed{b}$ $-\infty$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ $-1/2$.

3. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{2x}(2x - 1 - x^2)$ è crescente è
$\boxed{a}$ $-1 \le x \le 1$; $\boxed{b}$ $-1 \le x \le 0$; $\boxed{c}$ $0 \le x \le 1$; $\boxed{d}$ $x \le 0, x \ge 2$.

4. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^\alpha + \log n}$ è convergente?
$\boxed{a}$ $0 < \alpha < 2$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1/2$; $\boxed{c}$ $\alpha > 3$; $\boxed{d}$ $\alpha > 3/2$.

5. Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \ge \int_0^2 g\left(\frac{x}{2}\right) dx$;
$\boxed{b}$ $f(x) \ge g(x)$ in $[0, 1]$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx \ge \int_0^1 g^2(x)\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \ge \int_0^1 g\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

6. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 4?
$\boxed{a}$ $\cos(x + 4)$; $\boxed{b}$ $(1 + \cos(\pi\frac{x}{2}))^3$; $\boxed{c}$ $\cos(x^3 + 4)$; $\boxed{d}$ $\sin(4^x)$.

7. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle 4\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle 3\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$.

8. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfa
$\boxed{a}$ $y(1) = 2$; $\boxed{b}$ $y(1) = 3/2$; $\boxed{c}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$; $\boxed{d}$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$.

ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

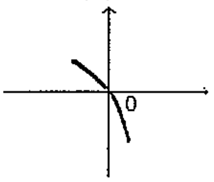
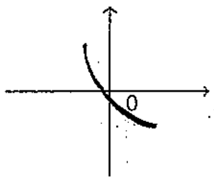
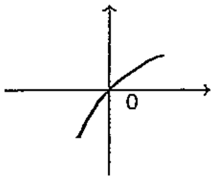
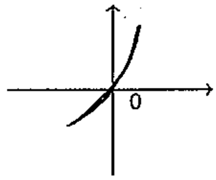
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{(x+1)^2 y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfa
$\boxed{a}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$; $\boxtimes$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$; $\boxed{c}$ $y(1) = 2$; $\boxed{d}$ $y(1) = 3/2$.

2. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$.

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxtimes$  .

3. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 4?
$\boxed{a}$ $\cos(x^3+4)$; $\boxed{b}$ $\sin(4^x)$; $\boxed{c}$ $\cos(x+4)$; $\boxtimes$ $(1+\cos(\pi\frac{x}{2}))^3$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - xe^{2x}}{x^2e^x + 2xe^{2x}} =$ $\boxed{a}$ 0; $\boxtimes$ $-1/2$; $\boxed{c}$ 2; $\boxed{d}$ $-\infty$.

5. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)}{(x+1)^2}\,dx =$ $\boxtimes$ $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle 4\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle 3\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$.

6. Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \int_0^1 g^2(x)\,dx$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 f(\tfrac{x}{2})\,dx \geq \int_0^1 g(\tfrac{x}{2})\,dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^2 f(\tfrac{x}{2})\,dx \geq \int_0^2 g(\tfrac{x}{2})\,dx$; $\boxed{d}$ $f(x) \geq g(x)$ in $[0,1]$.

7. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{2x}(1+2x-2x^2)$ è crescente è
$\boxed{a}$ $0 \leq x \leq 1$; $\boxed{b}$ $x \leq 0, x \geq 2$; $\boxtimes$ $-1 \leq x \leq 1$; $\boxed{d}$ $-1 \leq x \leq 0$.

8. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\alpha} + \log n}{2n^2 - 1}$ è convergente?

$\boxed{a}$ $\alpha > 3$; $\boxed{b}$ $\alpha > 3/2$; $\boxed{c}$ $0 < \alpha < 2$; $\boxtimes$ $0 < \alpha < 1/2$.

ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \log n}{2n^{2\alpha} - 1}$ è convergente?

   $\boxed{a}$ $0 < \alpha < 2$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1/2$; $\boxed{c}$ $\alpha > 3$; $\boxed{\xcancel{d}}$ $\alpha > 3/2$.

2. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

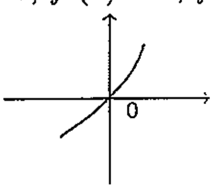
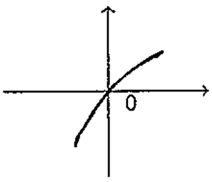
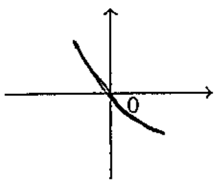
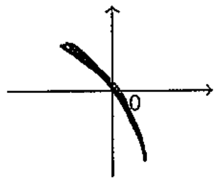
$$\begin{cases} y' = x^2 y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   soddisfa
   $\boxed{a}$ $y(1) = 2$; $\boxed{\xcancel{b}}$ $y(1) = 3/2$; $\boxed{c}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$; $\boxed{d}$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$.

3. Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{\xcancel{a}}$ $\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \geq \int_0^2 g\left(\frac{x}{2}\right) dx$;

   $\boxed{b}$ $f(x) \geq g(x)$ in $[0,1]$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \int_0^1 g^2(x)\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \geq \int_0^1 g\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

4. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$.

   $\boxed{a}$  ; $\boxed{\xcancel{b}}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

5. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{2x}(2x - 1 - x^2)$ è crescente è
   $\boxed{a}$ $-1 \leq x \leq 1$; $\boxed{b}$ $-1 \leq x \leq 0$; $\boxed{\xcancel{c}}$ $0 \leq x \leq 1$; $\boxed{d}$ $x \leq 0, x \geq 2$.

6. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)}{(x+1)^3}\,dx =$ $\boxed{a}$ $4\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$;

   $\boxed{\xcancel{b}}$ $3\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$; $\boxed{c}$ $2\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$.

7. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 4?
   $\boxed{a}$ $\cos(x+4)$; $\boxed{\xcancel{b}}$ $(1 + \cos(\pi\frac{x}{2}))^3$; $\boxed{c}$ $\cos(x^3 + 4)$; $\boxed{d}$ $\sin(4^x)$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x} - xe^{2x}}{x^2 e^x - 2x} =$ $\boxed{a}$ 2; $\boxed{\xcancel{b}}$ $-\infty$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ $-1/2$.

ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

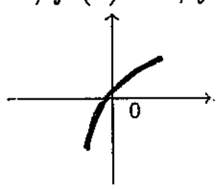
1. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 2?
   ☒ $(1+\cos(\pi x))^3$; $\boxed{b}$ $\cos(x^3+2)$; $\boxed{c}$ $\sin(2^x)$; $\boxed{d}$ $\cos(x+2)$.

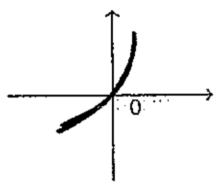
2. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{-2x}(1+2x-2x^2)$ è crescente è
   $\boxed{a}$ $-1 \le x \le 0$; $\boxed{b}$ $0 \le x \le 1$; ☒ $x \le 0, x \ge 2$; $\boxed{d}$ $-1 \le x \le 1$.

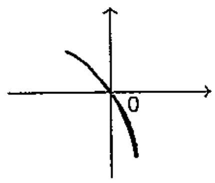
3. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \log n}{2n^{2\alpha} - 1}$ è convergente?
   $\boxed{a}$ $0 < \alpha < 1/2$; $\boxed{b}$ $\alpha > 3$; ☒ $\alpha > 3/2$; $\boxed{d}$ $0 < \alpha < 2$.

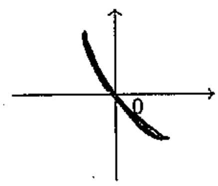
4. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\int_0^1 \frac{f'(x)}{(x+1)^3}\,dx =$ ☒ $3\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$;
   $\boxed{b}$ $2\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$; $\boxed{d}$ $4\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$.

5. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$.

   ☒ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - xe^{2x}}{x^2e^x + 2xe^{2x}} =$ $\boxed{a}$ $-\infty$; $\boxed{b}$ 0; ☒ $-1/2$; $\boxed{d}$ 2.

7. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{(x+1)^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   soddisfa
   $\boxed{a}$ $y(1) = 3/2$; $\boxed{b}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$; $\boxed{c}$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$; ☒ $y(1) = 2$.

8. Se $\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $f(x) \le g(x)$ in $[0,1]$;
   $\boxed{b}$ $\int_0^1 f^2(x)\,dx \le \int_0^1 g^2(x)\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 f(\frac{x}{2})\,dx \le \int_0^1 g(\frac{x}{2})\,dx$; ☒ $\int_0^2 f(\frac{x}{2})\,dx \le \int_0^2 g(\frac{x}{2})\,dx$.

ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Se $\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $\int_0^1 f(\frac{x}{2})\,dx \le \int_0^1 g(\frac{x}{2})\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^2 f(\frac{x}{2})\,dx \le \int_0^2 g(\frac{x}{2})\,dx$; $\boxed{c}$ $f(x) \le g(x)$ in $[0,1]$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 f^2(x)\,dx \le \int_0^1 g^2(x)\,dx$.

2. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 2?
$\boxed{a}$ $\sin(2^x)$; $\boxed{b}$ $\cos(x+2)$; $\boxtimes$ $(1+\cos(\pi x))^3$; $\boxed{d}$ $\cos(x^3+2)$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{-x} - xe^{2x}}{x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2x} =$ $\boxed{a}$ $-1/2$; $\boxed{b}$ 2; $\boxtimes$ $-\infty$; $\boxed{d}$ 0.

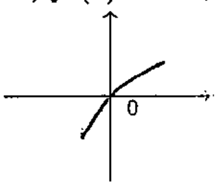
4. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{-2x}(1+2x+x^2)$ è crescente è
$\boxed{a}$ $x \le 0, x \ge 2$; $\boxed{b}$ $-1 \le x \le 1$; $\boxtimes$ $-1 \le x \le 0$; $\boxed{d}$ $0 \le x \le 1$.

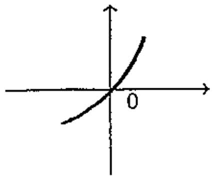
5. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

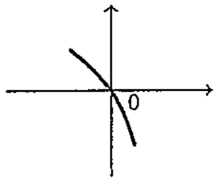
$$\begin{cases} y' = x^2 y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

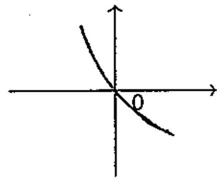
soddisfa
$\boxed{a}$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$; $\boxed{b}$ $y(1) = 2$; $\boxtimes$ $y(1) = 3/2$; $\boxed{d}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$.

6. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$.

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

7. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2\alpha} + \log n}{2n^2 - 1}$ è convergente?
$\boxed{a}$ $\alpha > 3/2$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 2$; $\boxtimes$ $0 < \alpha < 1/2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 3$.

8. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\int_0^1 \dfrac{f'(x)}{(x+1)^2}\,dx =$ $\boxed{a}$ $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$; $\boxed{b}$ $4\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$; $\boxed{c}$ $3\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$; $\boxtimes$ $2\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$.

ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{-2x}(1 + 2x + x^2)$ è crescente è
$\boxed{a}$ $x \leq 0, x \geq 2$; $\boxed{b}$ $-1 \leq x \leq 1$; $\boxed{c}$ $-1 \leq x \leq 0$; $\boxed{d}$ $0 \leq x \leq 1$.

2. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\, dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\, dx$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle 4\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\, dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle 3\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\, dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\, dx$.

3. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

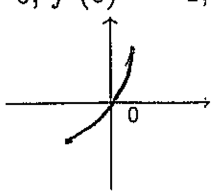
soddisfa
$\boxed{a}$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$; $\boxed{b}$ $y(1) = 2$; $\boxed{c}$ $y(1) = 3/2$; $\boxed{d}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$.

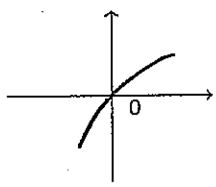
4. Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 g(x)\, dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \leq \int_0^1 g\left(\frac{x}{2}\right) dx$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \leq \int_0^2 g\left(\frac{x}{2}\right) dx$; $\boxed{c}$ $f(x) \leq g(x)$ in $[0,1]$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\, dx \leq \int_0^1 g^2(x)\, dx$.

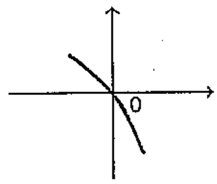
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2 e^x}{xe^{2x} - x^2 e^{-x}} =$ $\boxed{a}$ $-1/2$; $\boxed{b}$ 2; $\boxed{c}$ $-\infty$; $\boxed{d}$ 0.

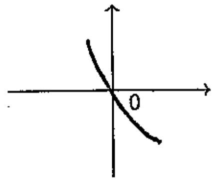
6. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha - 1}{n^3 + 2\log n}$ è convergente?
$\boxed{a}$ $\alpha > 3/2$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 2$; $\boxed{c}$ $0 < \alpha < 1/2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 3$.

7. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = -1$.

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 2?
$\boxed{a}$ $\sin(2^x)$; $\boxed{b}$ $\cos(x + 2)$; $\boxed{c}$ $(1 + \cos(\pi x))^3$; $\boxed{d}$ $\cos(x^3 + 2)$.

ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x - 2x^2e^x}{2x - x^2e^x} =$ $\boxed{a}$ 0; $\boxed{b}$ $-1/2$; $\boxtimes$ 2; $\boxed{d}$ $-\infty$.

2. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha - 1}{n^3 + 2\log n}$ è convergente?
   $\boxed{a}$ $\alpha > 3$; $\boxed{b}$ $\alpha > 3/2$; $\boxtimes$ $0 < \alpha < 2$; $\boxed{d}$ $0 < \alpha < 1/2$.

3. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)}{(x+1)^4}\,dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$;
   $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle 4\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle 3\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$.

4. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{(x+1)^2y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

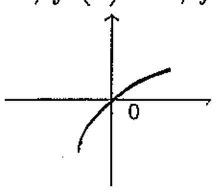
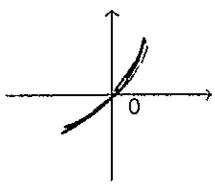
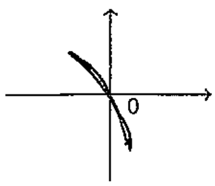
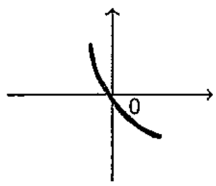
   soddisfa
   $\boxed{a}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$; $\boxtimes$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$; $\boxed{c}$ $y(1) = 2$; $\boxed{d}$ $y(1) = 3/2$.

5. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 4?
   $\boxed{a}$ $\cos(x^3 + 4)$; $\boxed{b}$ $\sin(4^x)$; $\boxed{c}$ $\cos(x + 4)$; $\boxtimes$ $(1 + \cos(\pi\frac{x}{2}))^3$.

6. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{2x}(1 + 2x - 2x^2)$ è crescente è
   $\boxed{a}$ $0 \le x \le 1$; $\boxed{b}$ $x \le 0, x \ge 2$; $\boxtimes$ $-1 \le x \le 1$; $\boxed{d}$ $-1 \le x \le 0$.

7. Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx \ge \int_0^1 g^2(x)\,dx$;
   $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx \ge \int_0^1 g\left(\frac{x}{2}\right)dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx \ge \int_0^2 g\left(\frac{x}{2}\right)dx$; $\boxed{d}$ $f(x) \ge g(x)$ in $[0, 1]$.

8. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$.

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

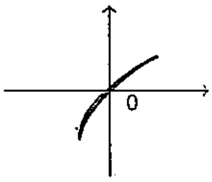
ANALISI MATEMATICA 1		18 gennaio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

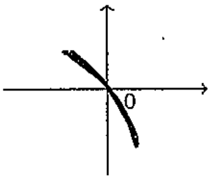
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

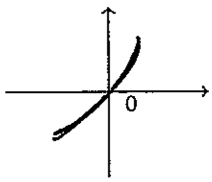
1. Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, si ha $\int_0^1 \frac{f'(x)}{(x+1)^4}\,dx =$ $\boxed{a}$ $3\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^4}\,dx$; $\boxed{b}$ $2\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^3}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$; $\boxtimes$ $4\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^5}\,dx$.

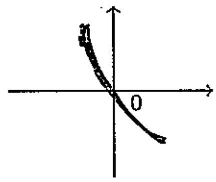
2. Se $\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx$, allora, necessariamente: $\boxed{a}$ $f(x) \leq g(x)$ in $[0,1]$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq \int_0^1 g^2(x)\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 f(\frac{x}{2})\,dx \leq \int_0^1 g(\frac{x}{2})\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^2 f(\frac{x}{2})\,dx \leq \int_0^2 g(\frac{x}{2})\,dx$.

3. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, sapendo che $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$.

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

4. Quale delle seguenti funzione è periodica di periodo 2?
$\boxtimes$ $(1+\cos(\pi x))^3$; $\boxed{b}$ $\cos(x^3+2)$; $\boxed{c}$ $\sin(2^x)$; $\boxed{d}$ $\cos(x+2)$.

5. Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2n^\alpha + \log n}$ è convergente?

$\boxed{a}$ $0 < \alpha < 1/2$; $\boxtimes$ $\alpha > 3$; $\boxed{c}$ $\alpha > 3/2$; $\boxed{d}$ $0 < \alpha < 2$.

6. La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{(x+1)^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfa
$\boxed{a}$ $y(1) = 3/2$; $\boxed{b}$ $y(1) = \sqrt[3]{2}$; $\boxed{c}$ $y(1) = \sqrt[3]{5/2}$; $\boxtimes$ $y(1) = 2$.

7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x - 2x^2e^x}{2x - x^2e^x} =$ $\boxed{a}$ $-\infty$; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ $-1/2$; $\boxtimes$ 2.

8. L'insieme dei numeri reali x in cui la funzione $f(x) = e^{-2x}(1+2x-2x^2)$ è crescente è
$\boxed{a}$ $-1 \leq x \leq 0$; $\boxed{b}$ $0 \leq x \leq 1$; $\boxtimes$ $x \leq 0, x \geq 2$; $\boxed{d}$ $-1 \leq x \leq 1$.

ANALISI MATEMATICA 1	18 gennaio 2010

1. **(6 punti)** Risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2}y = \dfrac{1}{x^3} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$?

È un'equazione lineare, del 1° ordine, non-omogenea.

La soluzione è data dalla formula:

$$y(x) = e^{-\int_1^x \frac{1}{t^2}dt}\left(\alpha + \int_1^x e^{\int_1^s \frac{1}{t^2}dt}\frac{1}{s^3}\,ds\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{t}\Big|_1^x}\left(\alpha + \int_1^x e^{-\frac{1}{t}\Big|_1^s}\frac{1}{s^3}\,ds\right) = e^{\frac{1}{x}-1}\left(\alpha + \int_1^x e^{1-\frac{1}{s}}\frac{1}{s^3}\,ds\right).$$

Ponendo $w = -1/s$ ($s = -1/w$, $ds = 1/w^2\,dw$, $w=-1$ per $s=1$, $w = -\frac{1}{x}$ per $s = x$) si ha

$$\int_1^x e^{1-1/s}\frac{1}{s^3}\,ds = e\int_{-1}^{-1/x} e^w(-w^3)\frac{1}{w^2}\,dw = -e\int_{-1}^{-1/x} we^w\,dw \overset{\text{per parti}}{=}$$

$$= -e\,we^w\Big|_{-1}^{-1/x} + e\int_{-1}^{-1/x} e^w\,dw = +\frac{e}{x}e^{-1/x} - e\cdot e^{-1} + e\,e^w\Big|_{-1}^{-1/x} =$$

$$= \frac{e}{x}e^{-1/x} - 1 + e\,e^{-1/x} - e\cdot e^{-1} = \frac{e}{x}e^{-1/x} + e\,e^{-1/x} - 2.$$

Quindi

$$y(x) = e^{1/x}\frac{1}{e}\left(\alpha + \frac{e}{x}e^{-1/x} + e\,e^{-1/x} - 2\right) =$$

$$= \frac{\alpha-2}{e}e^{1/x} + \frac{1}{x} + 1.$$

Siccome $1/x \to 0$ e $e^{1/x} \to 1$ per $x\to+\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{\alpha-2}{e} + 1,$$

e dunque il limite vale 0 se

$$\frac{\alpha-2}{e} + 1 = 0, \text{ cioè } \underline{\alpha = 2-e}.$$

1. (6 punti) Risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2}y = \dfrac{1}{x^3} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$?

È un'equazione lineare, del 1° ordine, non-omogenea.

La soluzione è data dalla formula:

$$y(x) = e^{-\int_1^x \frac{1}{t^2}dt}\left(\alpha + \int_1^x e^{\int_1^s \frac{1}{t^2}dt}\,\frac{1}{s^3}\,ds\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{t}\Big|_1^x}\left(\alpha+\int_1^x e^{-\frac1t\Big|_1^s}\,\frac{1}{s^3}\,ds\right) = e^{\frac1x-1}\left(\alpha+\int_1^x e^{1-\frac1s}\,\frac1{s^3}\,ds\right).$$

Ponendo $w=-1/s$ ($s=-1/w$, $ds = 1/w^2\, dw$, $w=-1$ per $s=1$, $w=-\frac1x$ per $s=x$) si ha

$$\int_1^x e^{1-1/s}\,\frac{1}{s^3}\,ds = e\int_{-1}^{-1/x} e^w(-w^3)\frac{1}{w^2}\,dw = -e\int_{-1}^{-1/x} we^w\, dw \overset{\text{per parti}}{=}$$

$$= -e\, we^w\Big|_{-1}^{-1/x} + e\int_{-1}^{-1/x} e^w\, dw = +\frac{e}{x}e^{-1/x} - e\cdot e^{-1} + e\, e^w\Big|_{-1}^{-1/x} =$$

$$= \frac{e}{x}e^{-1/x} - 1 + e\, e^{-1/x} - e\cdot e^{-1} = \frac{e}{x}e^{-1/x} + e\, e^{-1/x} - 2.$$

Quindi

$$y(x) = e^{1/x}\,\frac1e\left(\alpha + \frac{e}{x}e^{-1/x} + e\, e^{-1/x} - 2\right) =$$

$$= \frac{\alpha-2}{e}\,e^{1/x} + \frac1x + 1.$$

Siccome $1/x \to 0$ e $e^{1/x}\to 1$ per $x\to+\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{\alpha-2}{e}+1,$$

e dunque il limite vale 0 se

$$\frac{\alpha-2}{e}+1=0, \quad \text{cioè} \quad \underline{\alpha = 2-e}.$$

ANALISI MATEMATICA 1	18 gennaio 2010

2. (6 punti)
Per ogni $\beta \geq -1$ si calcolino l'area della superficie ottenuta facendo ruotare il grafico

$$G = \{(x,y)\,|\,3 \leq x \leq 4\,, y = \beta x + 1 - 3\beta\}\ .$$

attorno all'asse Y e l'area della superficie ottenuta facendo ruotare G attorno all'asse X.
Si determini il valore di β per cui le due aree sono uguali.

L'area ottenuta ruotando attorno all'asse Y è data da

$$A_Y = 2\pi\int_3^4 x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \overset{f'(x)=\beta}{=} 2\pi\int_3^4 x\sqrt{1+\beta^2}\,dx =$$

$$= \pi\sqrt{1+\beta^2}\;x^2\Big|_3^4 = \pi\sqrt{1+\beta^2}\,(16-9) = 7\pi\sqrt{1+\beta^2}.$$

L'area ottenuta ruotando attorno all'asse X è data da

$$A_X = 2\pi\int_3^4 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_3^4(\beta x+1-3\beta)\sqrt{1+\beta^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{1+\beta^2}\left(\frac\beta2 x^2\Big|_3^4 + (1-3\beta)(4-3)\right) = 2\pi\sqrt{1+\beta^2}\left(\frac72\beta+1-3\beta\right) =$$

$$= \pi\sqrt{1+\beta^2}\cdot(\beta+2).$$

Le aree sono uguali per β che soddisfa all'equazione

$$7\pi\sqrt{1+\beta^2} = (\beta+2)\,\pi\sqrt{1+\beta^2}, \quad \text{cioè} \quad 7=\beta+2,\ \underline{\beta=5}.$$

ANALISI MATEMATICA 1	18 gennaio 2010

3. **(6 punti)** Trovate, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto in $(-\infty, 0]$ di f definita da
$$f(x) = \left|\frac{x+1}{2-x}\right| + \frac{1}{1-x}.$$

Per $x \leq 0$ si ha $2-x>0$ e $1-x>0$, per cui la funzione è definita in $(-\infty, 0]$.

Si ha $x+1 \geq 0$ per $x \geq -1$, dunque $|x+1| = x+1$ per $x \geq -1$, $x+1 = -x-1$ per $x<-1$ e

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x} + \dfrac{1}{1-x} & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{1}{1-x} & \text{per } x < -1 . \end{cases}$$

Si ha $f(0) = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$, $f(-1) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{1-x}\right) = 1$.

Calcoliamo $f'(x)$ per $x>-1$ e per $x<-1$.

Per $\underline{x>-1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{2-x} + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} > 0,$$

dunque $f(x)$ cresce per $-1<x<0$.

Per $\underline{x<-1}$

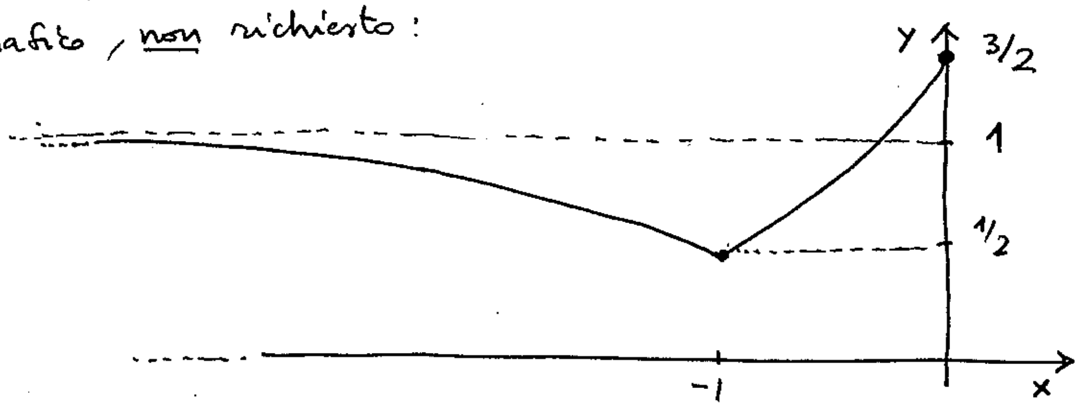
$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} =$$

$$= -\frac{2x^2-2x-1}{(x-2)^2(1-x)^2}.$$

Si ha $2x^2-2x-1 = 0$ per $x = \frac{1 \mp \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$, e siccome $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} > -1$, si ha $2x^2-2x-1>0$ per $x<-1$. Quindi $f'(x)<0$ e $f(x)$ decresce per $x<-1$.

In conclusione, $x=-1$ è un punto di minimo, e il minimo è $1/2$; $x=0$ è un punto di massimo, e il massimo vale $\frac{3}{2}$.

[Grafico, <u>non</u> richiesto:



]