COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

19 luglio 2011

Esercizio 1 (7 punti)

Data la curva $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$, $t \in [0,1]$, si determinino in ogni punto di $\alpha(t)$ il versore tangente $\mathbf{T}(t)$ e il versore normale $\mathbf{N}(t)$. Infine si calcoli l'integrale $\int_\alpha (xy - z)\, ds$.

Risultati: $\boxed{\vec{T}(t) = \frac{1}{1+2t^2}(1, 2t, 2t^2)}$ $\boxed{\vec{N}(t) = \frac{1}{1+2t^2}(-2t, 1-2t^2, 2t)}$ $\boxed{\int_\alpha (xy - z)ds = 7/36}$

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (1, 2t, 2t^2)$, per cui $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = \sqrt{(1+2t^2)^2} =$

$= 1+2t^2$.

Quindi $\vec{T}(t) = \frac{1}{1+2t^2}(1, 2t, 2t^2)$. Poi calcoliamo $\vec{T}'(t)$:

$$\vec{T}'(t) = \left((1+2t^2)^{-2}(-4t),\ 2(1+2t^2)^{-1} - 2t(1+2t^2)^{-2}4t,\ 4t(1+2t^2)^{-1} - 2t^2(1+2t^2)^{-2}4t\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+2t^2)^2}\left(-4t,\ 2+4t^2-8t^2,\ 4t+\cancel{8t^3}-\cancel{8t^3}\right) = \frac{2}{(1+2t^2)^2}(-2t, 1-2t^2, 2t).$$

Di conseguenza:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{(-2t, 1-2t^2, 2t)}{\sqrt{\cancel{4t^2}+1-\cancel{4t^2}+4t^4+4t^2}} = \frac{(-2t, 1-2t^2, 2t)}{1+2t^2}.$$

Infine

$$\int_\alpha (xy-z)\,ds = \int_0^1 \left(t^3 - \frac{2}{3}t^3\right)(1+2t^2)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 (t^3 + 2t^5)\,dt =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{7}{36}.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = \frac{x-2y}{2x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, nel triangolo di vertici $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Risultato:

MAX. ASSOLUTO : $f(1,0) = 1/2$

MIN. ASSOLUTO : $f((2-\sqrt{3})/3, (1+\sqrt{3})/3) = -3/[2(\sqrt{3}-1)]$.

Calcoli:

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2-(x-2y)4x}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+y^2+8xy}{(2x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2(2x^2+y^2)-(x-2y)2y}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2+2y^2-2xy}{(2x^2+y^2)^2}.$$

Per determinare i punti stazionari:

$$\begin{cases} -2x^2+y^2+8xy=0 \\ -4x^2+2y^2-2xy=0 \end{cases} \quad -2x^2+y^2=-8xy \quad \downarrow \quad -16xy-2xy=0 \to xy=0 \quad \begin{matrix} \nearrow x=0 \to y=0 \\ \searrow y=0 \to x=0. \end{matrix}$$

L'unica soluzione del sistema è dunque $(0,0)$, che è fuori dell'insieme di definizione di f. Non ci sono quindi punti stazionari di f.

Vediamo sul bordo del triangolo.

Per $x=1$ si ha $\frac{1-2y}{2+y^2}$. La derivata è $\frac{-2(2+y^2)-(1-2y)2y}{(2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2y-4}{(2+y^2)^2}$, che si annulla per $y^2-y-2=0$, cioè $y=-1$ e $y=2$. [Dunque per $0 \le y \le 1$ la funzione decresce, essendo -1 e 2 fuori di $[0,1]$.]

Per $y=1$ si ha $\frac{x-2}{2x^2+1}$. La derivata è $\frac{2x^2+1-(x-2)4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+8x+1}{(2x^2+1)^2}$, che si annulla per $-2x^2+8x+1=0$, cioè $x = 2 \mp 3/\sqrt{2}$. Si ha $2-3/\sqrt{2}<0$ e $2+3/\sqrt{2}>1$ [per cui per $0 \le x \le 1$ la funzione cresce].

Per $y=1-x$ si ha $\frac{x-2+2x}{2x^2+1-2x+x^2} = \frac{3x-2}{3x^2-2x+1}$. La derivata è

$$\frac{3(3x^2-2x+1)-(3x-2)(6x-2)}{(3x^2-2x+1)^2} = \frac{-9x^2+12x-1}{(3x^2-2x+1)^2},$$ che si annulla per $x = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{3}$. Si ha $0 < \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 1 < \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ [dunque la funzione decresce per $0 \le x < \frac{2-\sqrt{3}}{3}$ e cresce per $\frac{2-\sqrt{3}}{3} < x \le 1$]. In conclusione, bisogna confrontare $f(0,1) = -2$, $f(1,0) = 1/2$, $f(1,1) = -1/3$, $f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{2(\sqrt{3}-1)}$. Risulta $f(1,0) \to$ MAX, $f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right) \to$ MIN.

Esercizio 3 (8 punti)
Sia B il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1, e si considerino il cilindro K e il cono C così definiti:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, 0 \le z \le 2\}, \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Si calcoli il volume di $K \cap C$.

Risultato: $\boxed{\mathrm{vol}(K \cap C) = 2\pi - 32/9 \approx 2{,}7276}$

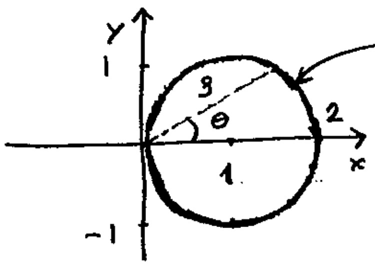
Calcoli:

Possiamo integrare per fili verticali, con $(x,y) \in B$ e $0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Quindi

$$\mathrm{vol}(K\cap C) = \iint_B dx\,dy \int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz = \iint_B (2 - \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$$

Si possono usare coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta$. Vediamo la regione in cui variano ρ e θ.



$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \text{ cioè} \\ x^2 - 2x + y^2 = 0. \end{cases}$$

Dunque $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, mentre ρ deve essere tale da soddisfare $(x-1)^2 + y^2 \le 1$, cioè $x^2 - 2x + y^2 \le 0$, cioè $\rho^2 \le 2\rho\cos\theta$. Quindi si ha $\rho \in [0, 2\cos\theta]$.

In conclusione

$$\mathrm{vol}(K\cap C) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\, d\rho\,(2-\rho) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left(\rho^2 - \rho^3/3\right)\Big|_0^{2\cos\theta} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\theta\, d\theta - \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = 2\pi - \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta - \cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta =$$

$$= 2\pi - \frac{8}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{8}{9}\,\mathrm{sen}^3\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi - \frac{16}{3} + \frac{16}{9} =$$

$$= 2\pi - \frac{32}{9} \approx 2{,}7276.$$

Esercizio 4 (8 punti) 1° modo

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $v(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $c = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4z^2 = 1, x \geq 0\}$. [Si scelga il versore normale che punta ad allontanarsi dall'asse di rotazione.]

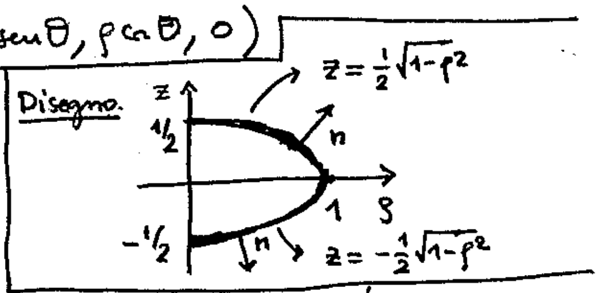
Risultato: $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$

Calcoli:

Parametrizziamo la superficie di rotazione con $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, $z = \pm \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0,1]$. [La curva c è un'ellisse di semiassi 1 e 1/2; la superficie di rotazione sarà un ellissoide di semiassi 1, 1 e 1/2, la distanza massima dall'asse z è 1. Si veda il disegno.]

Le derivate della parametrizzazione $\vec{R}(\rho, \theta) = \left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \pm\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}\right)$ sono

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \rho} = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \mp \frac{\rho}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right), \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} = (-\rho\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0)$$



e

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} = \left(\pm \frac{\rho^2\cos\theta}{2\sqrt{1-\rho^2}}, \pm \frac{\rho^2\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{1-\rho^2}}, \rho\right).$$

Affinché il versore normale punti ad allontanarsi dall'asse z, bisogna che sia positiva la sua terza componente quando $z > 0$, e negativa la sua terza componente quando $z < 0$.

Dunque per $z > 0$ si ha $\vec{N} = \left(\rho^2\cos\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, \rho^2\operatorname{sen}\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, \rho\right)$ e per $z < 0$ si ha $\vec{N} = \left(\rho^2\cos\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, \rho^2\operatorname{sen}\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, -\rho\right)$.

Quindi

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}\right)\cdot\left(\rho^2\cos\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, \rho^2\operatorname{sen}\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, \rho\right) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}\right)\cdot\left(\rho^2\cos\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, \rho^2\operatorname{sen}\theta/2\sqrt{1-\rho^2}, -\rho\right) =$$

$$= 2\cdot 2\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{\rho^3}{2\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho\sqrt{1-\rho^2}}{2}\right) d\rho =$$

↳ per parti il primo

$$= 4\pi\left(-\frac{1}{2}\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho + \frac{1}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho\right) =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = 2\pi.$$

Esercizio 4 (8 punti) <u>2° modo</u>

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathrm{v}(x,y,z) = (x,y,z)$ attraverso la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $c = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4z^2 = 1, x \geq 0\}$. [Si scelga il versore normale che punta ad allontanarsi dall'asse di rotazione.]

Risultato: $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 2\pi$.

Calcoli:

La curva c è un'ellisse di semiassi 1 e $1/2$, la superficie S di rotazione è un ellissoide di semiassi $1, 1$ e $1/2$, la regione V al suo interno è un ellissoide (pieno) di semiassi $1, 1$ e $1/2$.

Dunque, dal teorema della divergenza,

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\, dx\,dy\,dz .$$

[$\vec{n}$ versore normale <u>esterno</u> (quindi che punta ad allontanarsi dall'asse z).

Si ha $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$, e $\iiint_V dx\,dy\,dz = \operatorname{vol}(V) = \frac{4}{3}\pi\cdot 1\cdot 1\cdot 1/2 = \frac{2\pi}{3}$.

In conclusione

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 3\cdot\frac{2\pi}{3} = 2\pi .$$

[Volume ellissoide di semiassi a, b, c : $\frac{4}{3}\pi abc$.]