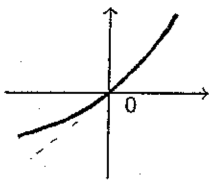
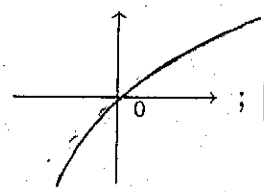
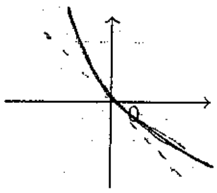
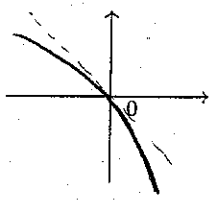
ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

1. Qual è il grafico di $f(x) = (x-1)\int_0^x \frac{e^{-2t}}{t-1}\,dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

2. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{a}$ $\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^1 \frac{1}{\tan\sqrt{x}/2}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \frac{x}{1-\cos(2x)}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \frac{x}{\sin(2x^2)}\,dx$.

3. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n \log n}{e^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0 < x < 3/e$; $\boxed{b}$ $x > e/3$; $\boxtimes$ $0 < x < e/3$; $\boxed{d}$ $x > 3/e$.

4. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = e^{-3x}$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ -9; $\boxed{b}$ $-4/3$; $\boxtimes$ $-9/2$; $\boxed{d}$ $8/3$.

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(-1) = 1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos x)\sin x\,dx =$: $\boxed{a}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x\,dx$; $\boxed{b}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x\,dx$; $\boxtimes$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x\cos x\,dx$; $\boxed{d}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x\cos x\,dx$.

6. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z+2i| > |z+4-2i|$ e $|z-2| < 1$ è: $\boxtimes$ l'insieme vuoto; $\boxed{b}$ un cerchio; $\boxed{c}$ un segmento; $\boxed{d}$ un semicerchio.

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Allora si ha $y(\pi/2) =$ $\boxtimes$ $\sqrt[3]{7}$; $\boxed{b}$ $-\sqrt[3]{5}$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ 1.

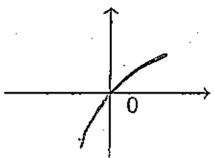
8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Allora: $\boxed{a}$ f è crescente; $\boxed{b}$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla; $\boxtimes$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla; $\boxed{d}$ f è decrescente.

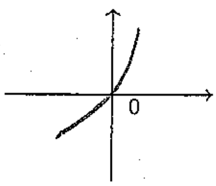
ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

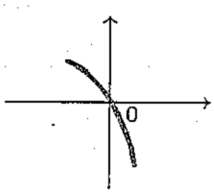
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

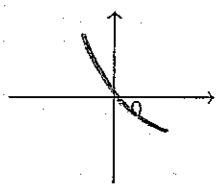
1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Allora: $\boxed{a}$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla; $\boxed{b}$ f è decrescente; $\boxed{c}$ f è crescente; $\boxed{d}$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla.

2. Qual è il grafico di $f(x) = (x-1)\int_0^x \frac{e^{2t}}{t-1}\, dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

3. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z+2i| < |z+4-2i|$ e $|z+2i| < 1$ è: $\boxed{a}$ un segmento; $\boxed{b}$ un semicerchio; $\boxed{c}$ l'insieme vuoto; $\boxed{d}$ un cerchio.

4. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{a}$ $\int_0^1 \frac{1}{e^{3x}-1}\, dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 \frac{x}{\tan(x^2)}\, dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\, dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \frac{1}{\sin(2\sqrt{x})}\, dx$.

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Allora si ha $y(\pi) =$ $\boxed{a}$ 0; $\boxed{b}$ 1; $\boxed{c}$ $\sqrt[3]{7}$; $\boxed{d}$ $-\sqrt[3]{5}$.

6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(0) = -1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos x)\cos x \;\, dx =$: $\boxed{a}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x \cos x \;\, dx$; $\boxed{b}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x \cos x\, dx$; $\boxed{c}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x\, dx$; $\boxed{d}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x\, dx$.

7. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^n}{(3x)^n}$ è convergente è:

$\boxed{a}$ $0 < x < e/3$; $\boxed{b}$ $x > 3/e$; $\boxed{c}$ $0 < x < 3/e$; $\boxed{d}$ $x > e/3$.

8. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = e^{-3x}$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-9/2$; $\boxed{b}$ $8/3$; $\boxed{c}$ -9; $\boxed{d}$ $-4/3$.

ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

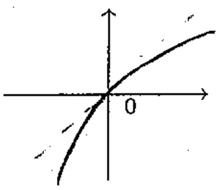
1. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

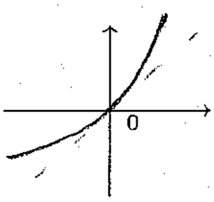
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1 \, . \end{cases}$$

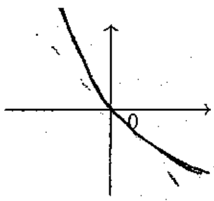
Allora si ha $y(-\pi) =$ $\boxed{a}$ $-\sqrt[3]{5}$; $\boxed{b}$ 0; $\boxtimes$ 1; $\boxed{d}$ $\sqrt[3]{7}$.

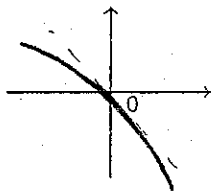
2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(1) = -1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\cos x \, dx =$: $\boxed{a}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x \, dx$; $\boxed{b}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x \cos x \, dx$; $\boxtimes$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x \cos x \, dx$; $\boxed{d}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x \, dx$.

3. Qual è il grafico di $f(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-3t}}{t-1}\,dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

4. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z + 2i| = |z + 4 - 2i|$ e $|z + 2| < 1$ è: $\boxed{a}$ un cerchio; $\boxtimes$ un segmento; $\boxed{c}$ un semicerchio; $\boxed{d}$ l'insieme vuoto.

5. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = \sin(2x)$. Allora $a_3 =$ $\boxtimes$ $-4/3$; $\boxed{b}$ $-9/2$; $\boxed{c}$ $8/3$; $\boxed{d}$ -9.

6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Allora: $\boxtimes$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla; $\boxed{b}$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla; $\boxed{c}$ f è decrescente; $\boxed{d}$ f è crescente.

7. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}}dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\tan(x^2/2)}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\,dx$.

8. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (ex)^n}{3^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $x > e/3$; $\boxed{b}$ $0 < x < e/3$; $\boxed{c}$ $x > 3/e$; $\boxtimes$ $0 < x < 3/e$.

ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

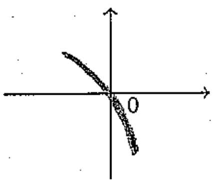
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- ~~*Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.~~

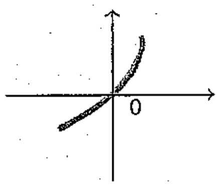
1. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = \log(1+2x)$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ -9; $\boxed{b}$ $-4/3$; $\boxed{c}$ $-9/2$; $\boxtimes$ $8/3$.

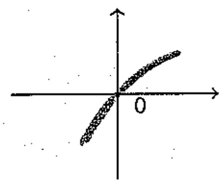
2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora: $\boxed{a}$ f è crescente; $\boxed{b}$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla; $\boxtimes$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla; $\boxed{d}$ f è decrescente.

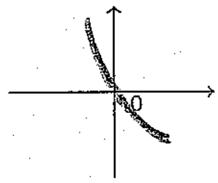
3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(0) = 1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\sin x \, dx =:$ $\boxtimes$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x \, dx$; $\boxed{b}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x \, dx$; $\boxed{c}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x\cos x \, dx$; $\boxed{d}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x \cos x \, dx$.

4. Qual è il grafico di $f(x) = (x-1)\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{t-1}\, dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

5. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \log n}{(ex)^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0 < x < 3/e$; $\boxed{b}$ $x > e/3$; $\boxed{c}$ $0 < x < e/3$; $\boxtimes$ $x > 3/e$.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Allora si ha $y(\pi/2) =$ $\boxtimes$ $\sqrt[3]{7}$; $\boxed{b}$ $-\sqrt[3]{5}$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ 1.

7. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z+2i| > |z+4-2i|$ e $|z+2| < 1$ è: $\boxed{a}$ l'insieme vuoto; $\boxed{b}$ un cerchio; $\boxed{c}$ un segmento; $\boxtimes$ un semicerchio.

8. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\, dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\tan(\sqrt{x}/2)}\, dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-\cos(3x)}\, dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sin(x^2)}\, dx$.

ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: $+1.5$. Risposta errata: -0.25.*

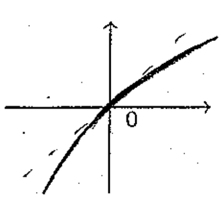
1. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z+2i| = |z+4-2i|$ e $|z+2| < 1$ è: $\boxed{a}$ un cerchio; $\boxed{\times}$ un segmento; $\boxed{c}$ un semicerchio; $\boxed{d}$ l'insieme vuoto.

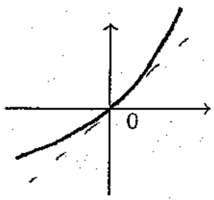
2. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \log n}{(ex)^n}$ è convergente è:
$\boxed{a}$ $x > e/3$; $\boxed{b}$ $0 < x < e/3$; $\boxed{\times}$ $x > 3/e$; $\boxed{d}$ $0 < x < 3/e$.

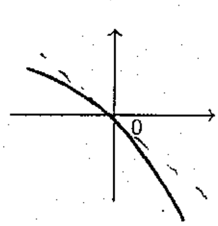
3. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = \log(1+2x)$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-4/3$; $\boxed{b}$ $-9/2$; $\boxed{\times}$ $8/3$; $\boxed{d}$ -9.

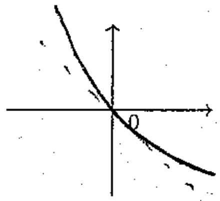
4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$
Allora si ha $y(-\pi/2) =$ $\boxed{\times}$ $-\sqrt[3]{5}$; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ 1; $\boxed{d}$ $\sqrt[3]{7}$.

5. Qual è il grafico di $f(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x \frac{e^{3t}}{t-1}\,dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{\times}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{\times}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(2\sqrt{x})}\,dx$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{3x}-1}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\tan(x^2)}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\,dx$.

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora: $\boxed{a}$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla; $\boxed{\times}$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla; $\boxed{c}$ f è decrescente; $\boxed{d}$ f è crescente.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(1) = -1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\cos x\,dx =:$ $\boxed{a}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x\,dx$; $\boxed{b}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x\cos x\,dx$; $\boxed{\times}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x\cos x\,dx$; $\boxed{d}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x\,dx$.

ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(0) = -1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos x)\cos x\,dx =:$ $\boxed{a}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x\cos x\,dx$; $\boxed{b}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x\,dx$; $\boxtimes$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x\,dx$; $\boxed{d}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x\cos x\,dx$.

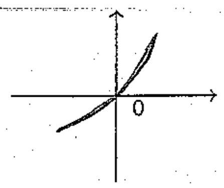
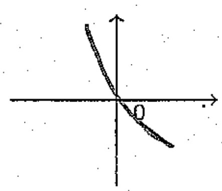
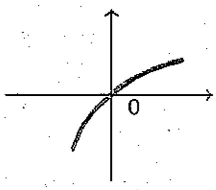
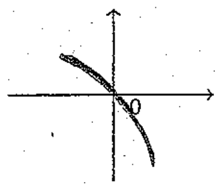
2. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z + 2i| > |z + 4 - 2i|$ e $|z + 2| < 1$ è: $\boxtimes$ un semicerchio; $\boxed{b}$ l'insieme vuoto; $\boxed{c}$ un cerchio; $\boxed{d}$ un segmento.

3. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{a}$ $\int_0^1 \frac{x}{\tan(x^2/2)}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \frac{1}{e^{2x} - 1}\,dx$.

4. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^n}{(3x)^n}$ è convergente è:
   $\boxed{a}$ $x > 3/e$; $\boxed{b}$ $0 < x < 3/e$; $\boxtimes$ $x > e/3$; $\boxed{d}$ $0 < x < e/3$.

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Allora: $\boxed{a}$ f è decrescente; $\boxed{b}$ f è crescente; $\boxtimes$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla; $\boxed{d}$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla.

6. Qual è il grafico di $f(x) = (x - 1)\int_0^x \frac{e^{2t}}{t - 1}\,dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxtimes$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

7. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = \sin(2x)$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $8/3$; $\boxed{b}$ -9; $\boxtimes$ $-4/3$; $\boxed{d}$ $-9/2$.

8. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Allora si ha $y(\pi) =$ $\boxtimes$ 1; $\boxed{b}$ $\sqrt[3]{7}$; $\boxed{c}$ $-\sqrt[3]{5}$; $\boxed{d}$ 0.

ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

1. L'insieme dei valori del parametro reale $x > 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n \log n}{e^n}$ è convergente è:
$\boxed{a}$ $x > 3/e$; $\boxed{b}$ $0 < x < 3/e$; $\boxed{c}$ $x > e/3$; $\boxed{\times}$ $0 < x < e/3$.

2. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

Allora si ha $y(-\pi/2) =$ $\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ $\sqrt[3]{7}$; $\boxed{\times}$ $-\sqrt[3]{5}$; $\boxed{d}$ 0.

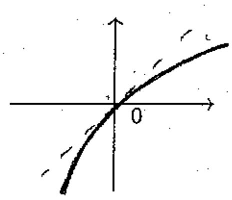
3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Allora:
$\boxed{a}$ f è decrescente; $\boxed{b}$ f è crescente; $\boxed{c}$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla; $\boxed{\times}$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla.

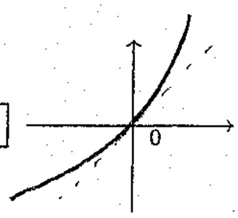
4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(-1) = 1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos x) \sin x \, dx =$: $\boxed{a}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x) \sin x \cos x \, dx$; $\boxed{b}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x) \cos^2 x \, dx$; $\boxed{c}$ $1 + \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x) \sin^2 x \, dx$; $\boxed{\times}$ $1 - \int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x) \sin x \cos x \, dx$.

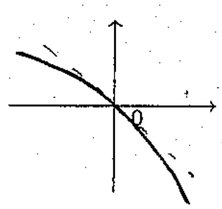
5. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{a}$ $\int_0^1 \frac{x}{\sin(2x^2)} \, dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)} \, dx$; $\boxed{\times}$ $\int_0^1 \frac{1}{\tan \sqrt{x}/2} \, dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \frac{x}{1 - \cos(2x)} \, dx$.

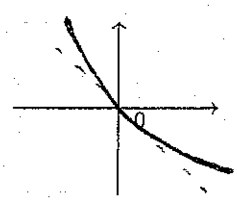
6. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x) = \log(1 - 3x)$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $8/3$; $\boxed{\times}$ -9; $\boxed{c}$ $-4/3$; $\boxed{d}$ $-9/2$.

7. Qual è il grafico di $f(x) = (1 - x) \int_0^x \frac{e^{3t}}{t - 1} \, dt$ vicino a $x = 0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{\times}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z + 2i| > |z + 4 - 2i|$ e $|z - 2| < 1$ è: $\boxed{a}$ un semicerchio; $\boxed{\times}$ l'insieme vuoto; $\boxed{c}$ un cerchio; $\boxed{d}$ un segmento.

ANALISI MATEMATICA 1		19 gennaio 2009
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Uno solo dei seguenti integrali impropri è convergente. Quale? $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-\cos(3x)}\,dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sin(x^2)}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x+1)}\,dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\tan(\sqrt{x}/2)}\,dx$.

2. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la serie di Taylor di $f(x)=\log(1-3x)$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-9/2$; $\boxed{b}$ $8/3$; $\boxtimes$ -9; $\boxed{d}$ $-4/3$.

3. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$
Allora si ha $y(-\pi) =$ $\boxed{a}$ 0; $\boxtimes$ 1; $\boxed{c}$ $\sqrt[3]{7}$; $\boxed{d}$ $-\sqrt[3]{5}$.

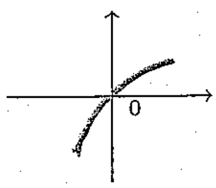
4. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione derivabile, tale che $f(0)=0$, $f(1)=2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$. Allora: $\boxtimes$ esiste almeno un valore, ma non necessariamente due, per cui f' si annulla; $\boxed{b}$ f è decrescente; $\boxed{c}$ f è crescente; $\boxed{d}$ esistono almeno due valori per cui f' si annulla.

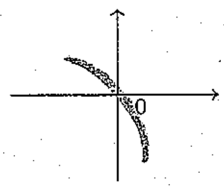
5. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano le due diseguaglianze $|z+2i| < |z+4-2i|$ e $|z+2i|<1$ è: $\boxed{a}$ un segmento; $\boxed{b}$ un semicerchio; $\boxed{c}$ l'insieme vuoto; $\boxtimes$ un cerchio.

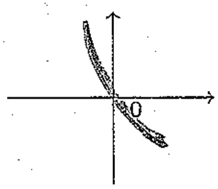
6. L'insieme dei valori del parametro reale $x>0$ per cui $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(ex)^n}{3^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0<x<e/3$; $\boxed{b}$ $x>3/e$; $\boxtimes$ $0<x<3/e$; $\boxed{d}$ $x>e/3$.

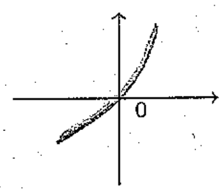
7. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e tale che $f(0)=1$. Allora $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\sin x\ \ dx =$: $\boxed{a}$ $1-\int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin x\cos x\ \ dx$; $\boxed{b}$ $1-\int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\sin x\cos x\,dx$; $\boxtimes$ $1+\int_{\pi/2}^{\pi} f'(\sin x)\cos^2 x\,dx$; $\boxed{d}$ $1+\int_{\pi/2}^{\pi} f'(\cos x)\sin^2 x\,dx$.

8. Qual è il grafico di $f(x)=(1-x)\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-3t}}{t-1}\,dt$ vicino a $x=0$? [Non serve calcolare esplicitamente l'integrale.]

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

ANALISI MATEMATICA I	19 gennaio 2009

1. (6 punti)
Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la regione di piano compresa fra l'asse x e il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{3+2x^2}$, $x \in [1,2]$.

La formula che dà il volume è:

$$V = 2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{x}{3+2x^2}\, dx = 2\pi \int_1^2 \frac{x^2}{3+2x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x^2+3-3}{2x^2+3}\, dx = \pi\left(\int_1^2 1\, dx - 3\int_1^2 \frac{1}{2x^2+3}\, dx\right) =$$

$$= \pi - 3\pi \int_1^2 \frac{1}{3(1+2x^2/3)}\, dx =$$

$$= \pi - \pi \int_1^2 \frac{1}{1+\frac{2x^2}{3}}\, dx .$$

Ponendo $\sqrt{\frac{2}{3}}\, x = t$, $dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\, dt$, $x = 1 \to t = \sqrt{2/3}$, $x = 2 \to t = 2\sqrt{2/3}$,

si ha:

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\frac{2x^2}{3}}\, dx = \int_{\sqrt{2/3}}^{2\sqrt{2/3}} \frac{1}{1+t^2} \sqrt{\frac{3}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{arctg}\, t \Big|_{\sqrt{2/3}}^{2\sqrt{2/3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{arctg}\left(2\sqrt{2/3}\right) - \sqrt{3/2}\, \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2/3}\right).$$

Dunque:

$$V = \pi\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{arctg}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right).$$

ANALISI MATEMATICA I	19 gennaio 2009

2. (6 punti)
Si determini l'insieme dei valori del parametro $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}(x^2+3x+1)^n$$

è convergente.

Siccome la serie non è a termini non-negativi (x^2+3x+1 può assumere valori <0...), studiamo la convergenza assoluta.

Dal criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)^3+1}|x^2+3x+1|^{n+1}}{\frac{n+1}{n^3+1}|x^2+3x+1|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^3+1}{n^3+3n^2+3n+2}|x^2+3x+1| =$$

$$= |x^2+3x+1|.$$

Si vuole quindi avere $|x^2+3x+1|<1$, cioè:

$$x^2+3x+1<1 \iff x^2+3x<0 \iff x(x+3)<0 \iff -3<x<0$$

$$x^2+3x+1>-1 \iff \underset{\substack{\downarrow \\ \text{le radici sono } x=-1 \text{ e } x=-2}}{x^2+3x+2>0} \iff x<-2,\ x>-1.$$

Dunque abbiamo convergenza assoluta (e dunque convergenza) per $-3<x<-2$, $-1<x<0$.

Quando $|x^2+3x+1|>1$ abbiamo $\frac{n+1}{n^3+1}|x^2+3x+1|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, dunque $|a_n| \to +\infty$, $a_n \not\to 0$, per cui la serie non converge per $x<-3$, $-2<x<-1$, $x>0$.

Infine per $x=0$ e $x=-3$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$, mentre per $x=-2$ e $x=-1$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3+1}$. In ambedue i casi si ha convergenza, poiché

$$\frac{n+1}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}, \text{ e la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ è convergente.}$$

[Nel caso $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}(-1)^n$ si considera la serie in valore assoluto, per cui si stabilisce la convergenza assoluta, che implica la convergenza.]

ANALISI MATEMATICA I	19 gennaio 2009

3. **(6 punti)**
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = 13\cos x \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta\,. \end{cases}$$

Per quali valori di α, β la soluzione del problema di Cauchy è una funzione limitata?

~~Le radici del polinomio associato r^2-4r+8 sono:~~

$r^2-4r+8=0$ per $r = 2\mp\sqrt{4-8} = 2\mp 2i$.

Dunque la soluzione $y_0(x)$ dell'omogenea è:

$$y_0(x) = c_1 e^{2x}\operatorname{sen}(2x) + c_2 e^{2x}\cos(2x).$$

La soluzione particolare $y_*(x)$ ha la forma $y_*(x) = A\cos x + B\sin x$,

e si ha

$$y_*'(x) = -A\sin x + B\cos x\,, \quad y_*''(x) = -A\cos x - B\sin x\,,$$

per cui

$$y_*'' - 4y_*' + 8y_* = -A\cos x - B\sin x - 4(-A\sin x + B\cos x) + 8(A\cos x + B\sin x) =$$

$$= (7A-4B)\cos x + (7B+4A)\sin x = 13\cos x\,,$$

cioè

$$\begin{cases} 7A-4B = 13 \\ 7B+4A = 0 \end{cases} \longrightarrow A = -\frac{7}{4}B \rightarrow \frac{-49}{4}B - 4B = -\frac{65}{4}B = 13 \rightarrow B = -\frac{4}{5}$$

$$\downarrow$$

$$A = \frac{7}{5}.$$

Dunque la soluzione generale è $y(x) = c_1 e^{2x}\sin(2x) + c_2 e^{2x}\cos(2x) + \frac{7}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x$

Imponendo i dati di Cauchy (si calcoli $y'(x)\ldots$), si ha:

$$\alpha = y(0) = c_2 + 7/5 \longrightarrow c_2 = (\alpha - 7/5)$$

$$\beta = y'(0) = 2c_1 + 2c_2 - 4/5 = 2c_1 + 2\alpha - \frac{18}{5} \longrightarrow c_1 = \frac{\beta}{2} - \alpha + \frac{9}{5}.$$

Dunque la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = (\beta/2 - \alpha + 9/5)e^{2x}\sin(2x) + (\alpha - 7/5)e^{2x}\cos(2x) + 7/5\cos x - 4/5\sin x.}$$

Siccome e^{2x} <u>non</u> è una funzione limitata, affinché $y(x)$ sia limitata bisogna imporre

$$\beta/2 - \alpha + 9/5 = 0 \quad e \quad \alpha - 7/5 = 0\,, \text{ cioè}$$

$\underline{\alpha = 7/5}$ e $\beta/2 = 7/5 - 9/5 = -2/5$, $\underline{\beta = -4/5}$.