COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

19 gennaio 2015

Esercizio 1 (7 punti). Si determini il valore di $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui il campo vettoriale

$$\vec{V}(x,y,z) = (1+x^2)^{-\alpha}(2x - 2xyz, z + zx^2, y + yx^2)$$

è conservativo. Per quel valore di α se ne determini quindi un potenziale.

Risultati: $\boxed{\alpha = 2.}$ $\boxed{\varphi(x,y,z) = \frac{yz-1}{1+x^2} + \text{cost}.}$

Calcoli:

La regione in cui $\vec{V}$ è definito è tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso. Dunque è sufficiente verificare che rot $\vec{V} = \vec{0}$.

Si ha

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = (1+x^2)^{-\alpha}\, 2zx - \alpha(1+x^2)^{\alpha-1}(z+x^2z)2x = (1+x^2)^{-\alpha}(2zx - 2\alpha zx)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = (1+x^2)^{-\alpha}(-2xz).$$

Sono uguali se $2zx - 2\alpha zx = -2zx$, cioè $1-\alpha = -1$, $\underline{\alpha = 2}$.

Poi

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = (1+x^2)^{-\alpha}(-2xy), \quad \frac{\partial V_3}{\partial x} = (1+x^2)^{-\alpha}\, 2yx - \alpha(1+x^2)^{\alpha-1}(y+yx^2)2x =$$

$$= (1+x^2)^{-\alpha}(2yx - \alpha 2yx).$$

Sono uguali se $2yx - 2\alpha yx = -2yx$, cioè $1-\alpha = -1$, $\underline{\alpha = 2}$.

Infine $\frac{\partial V_2}{\partial z} = (1+x^2)^{-\alpha}(1+x^2) = (1+x^2)^{-\alpha+1}$, $\frac{\partial V_3}{\partial y} = (1+x^2)^{-\alpha}(1+x^2) = (1+x^2)^{-\alpha+1}$,

e sono uguali per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ponendo $\alpha = 2$, si ha $\vec{V}(x,y,z) = (1+x^2)^{-2}(2x - 2xyz, z + zx^2, y + yx^2)$.

~~Dunque~~, cominciando con l'integrare $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1+x^2)^{-1} z$,

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{z}{1+x^2}\, dy = \frac{zy}{1+x^2} + g(x,z);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2} + \frac{\partial g}{\partial z}(x,z) = \frac{y}{1+x^2} \Rightarrow g(x,z) = h(x) + c;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{zy}{(1+x^2)^2}\, 2x + h'(x) = \frac{2x(1-yz)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{yz-1}{1+x^2} + \text{cost}.$$

Esercizio 2 (7 punti). Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $g(x, y, z) = x^2 + z - y^3$ sull'insieme $\Theta = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z + y^2 - x^2 = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Risultati: $\boxed{\max g = 2 \text{ in } (\pm 1, 0, 1)\ ;\ \min g = -2 \text{ in } (0, 1, -1).}$

Calcoli:

Ricavando $z = x^2 - y^2$ dall'equazione del vincolo, si può cercare il massimo e il minimo assoluto di $q(x,y) = g(x, y, x^2-y^2) = x^2 + x^2 - y^2 - y^3 = 2x^2 - y^2 - y^3$ nel cerchio $\{x^2+y^2 \leq 1\}$.

Alternativa: metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si deve risolvere

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + z - y^3) = \lambda \frac{\partial}{\partial x}(z + y^2 - x^2), \text{ cioè } 2x = -2\lambda x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + z - y^3) = \lambda \frac{\partial}{\partial y}(z + y^2 - x^2), \text{ cioè } -3y^2 = 2\lambda y$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + z - y^3) = \lambda \frac{\partial}{\partial z}(z + y^2 - x^2), \text{ cioè } 1 = \lambda$$

con l'ulteriore equazione $z + y^2 - x^2 = 0$. Dunque viene $2x = -2x$, cioè $x = 0$, $-3y^2 = 2y$, cioè $y = 0$ e $y = -2/3$, e in corrispondenza di $x = 0, y = 0$ viene $z = 0$, in corrispondenza di $x = 0, y = -2/3$ viene $z = -4/9$. [Si noti che la restrizione $x^2+y^2 < 1$ è soddisfatta sia per $(0,0)$ che per $(0, -2/3)$.]

Si ha $g(0,0,0) = 0$, $g(0, -2/3, -4/9) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$.

Poi bisogna controllare sul <u>bordo del vincolo</u>, cioè quando $x^2+y^2 = 1$ e z ricavato da $z + y^2 - x^2 = 0$. Ponendo $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, per $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha $z = x^2 - y^2 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, e poi

$$k(\theta) = g(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = \cos^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin^3\theta =$$
$$= 2(1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta - \sin^3\theta = 2 - 3\sin^2\theta - \sin^3\theta.$$

Dunque $k'(\theta) = -6 \sin\theta \cos\theta - 3\sin^2\theta \cos\theta = -3 \sin\theta \cos\theta (2 + \sin\theta)$, che si annulla per $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (per $\theta \in (0, 2\pi)$).

Si devono poi considerare gli estremi $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Si ha $k(0) = 2$, $k(\pi/2) = -2$, $k(\pi) = 2$, $k(\frac{3}{2}\pi) = 0$, $k(2\pi) = 2$.

Dunque $\max g = 2$ in $(\pm 1, 0, 1)$; $\min g = -2$ in $(0, 1, -1)$.

Esercizio 3 (8 punti). Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_R z\,dxdydz$, ove R è l'insieme ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme contenuto nel piano (x,z) e compreso fra l'asse x e il grafico di $q(x) = x^3 - x$ per $0 \le x \le 1$.

Risultato: $\iiint_R z\,dx\,dy\,dz = -\frac{\pi}{24}$.

Calcoli:

Possiamo descrivere l'insieme R [in coordinate cilindriche] come $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0,1]$ e $z \in [\rho^3 - \rho, 0]$ (si noti che $\rho^3 - \rho < 0$ per $0 < \rho < 1$!). Si ricordi che, nel piano (x,z), la variabile x rappresenta la distanza dall'asse di rotazione, cioè la variabile ρ delle coordinate cilindriche.

Si deve quindi calcolare

$$\iiint_R z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^3-\rho}^{0} dz\, z \overbrace{\rho}^{\text{jacobiano}} = 2\pi \int_0^1 d\rho \left(\rho \frac{z^2}{2}\Big|_{\rho^3-\rho}^{0} \right) =$$

$$= -\pi \int_0^1 \rho(\rho^3-\rho)^2\,d\rho = -\pi \int_0^1 \rho(\rho^6 - 2\rho^4 + \rho^2)\,d\rho =$$

$$= -\pi \int_0^1 (\rho^7 - 2\rho^5 + \rho^3)\,d\rho = -\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{2}{6} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{24}.$$

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove

$$\vec{F} = (xy+1, y, z) \quad , \quad S = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, z = y^3 - x^3, x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$$

(si scelga la normale orientata verso l'alto).

Risultato: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{3}{2}\pi$.

Calcoli:

Parametrizziamo S con $\underbrace{x = x,\ y = y,\ z = y^3 - x^3}_{\vec{r}(x,y),\ \text{con } \frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = (1,0,-3x^2),\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = (0,1,3y^2)}$, al variare di (x,y) nell'ellisse $\{x^2 + y^2/4 \le 1\}$, che chiameremo E.

Il vettore normale è dato dal prodotto vettore tra $(1,0,-3x^2)$ e $(0,1,3y^2)$, cioè è $(3x^2, -3y^2, 1)$ (orientato verso l'alto).

Si deve dunque calcolare

$\boxed{\text{coordinate ellittiche } x = \rho\cos\theta,\ y = 2\rho\sin\theta \quad \rho\in[0,1] \quad \theta\in[0,2\pi]}$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_E (xy+1, y, y^3 - x^3)\cdot(3x^2, -3y^2, 1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{2\rho}_{\text{jacobiano}} \left[3\rho^2\cos^2\theta\,(2\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 1) - 3\cdot 8\rho^3\,\text{sen}^3\theta + 8\rho^3\,\text{sen}^3\theta - \rho^3\cos^3\theta\right] d\rho =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \left[6\rho^5\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\rho^3\cos^2\theta - 16\rho^4\,\text{sen}^3\theta - \rho^4\cos^3\theta\right] =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\,(3\rho^3\cos^2\theta) = 6\pi\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

[Si è usato $\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\cos^4\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$; $\int_0^{2\pi}\text{sen}^3\theta\,d\theta =$

$= \int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\cos^2\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$;

$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,(1-\text{sen}^2\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi}\cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta =$

$= \text{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\text{sen}^3\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$; $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = \pi$.]