ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	19 giugno 2014

1. **(6 punti)** Si determini il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse Y l'insieme

$$K = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le \sqrt{\pi},\, 0 \le y \le 4 + x^2\cos(2x^2)\}\,.$$

Siccome $\cos(2x^2) \geq -1$ e $x^2 \leq \pi$ per $x \in [0,\sqrt{\pi}]$, si ha $x^2\cos(2x^2) \geq -\pi$ per $x\in[0,\sqrt{\pi}]$, dunque $4+x^2\cos(2x^2) \geq 4-\pi > 0$ per $x\in[0,\sqrt{\pi}]$.

Dunque il volume richiesto è dato da

$$\text{vol}(K) = 2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}} x\left(4+x^2\cos(2x^2)\right)dx = 2\pi\cdot 2x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}} + \pi\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x^3\cos(2x^2)\,dx =$$

$$= 4\pi^2 + \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt = 4\pi^2 + \frac{\pi}{4}\left[t\,\text{sen}\,t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\text{sen}\,t\,dt\right] =$$

$2x^2 = t$

$4x\,dx = dt$

$x=0 \to t=0$

$x=\sqrt{\pi} \to t = 2\pi$

$$= 4\pi^2 + \frac{\pi}{4}\left[t\,\text{sen}\,t\Big|_0^{2\pi} + \cos t\Big|_0^{2\pi}\right] = 4\pi^2.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	19 giugno 2014

2. **(6 punti)** Per ogni $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ sia $f(x) = \int_1^x \frac{\log(1+s^{-\alpha})\arctan(s^{-2\beta})}{s^{2\alpha-\beta+2}}\,ds$, $x \geq 1$. i) Determinare tutti i valori α e β per cui $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito. ii) Determinare tutti i valori α e β per cui $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ esiste finito. iii) Per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(i) Il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è un limite di "integrali parziali", dunque la domanda equivale a chiedere di determinare tutti i valori di α e β per cui l'integrale improprio è convergente. Siccome per $s \to +\infty$ si ha $\arctan(s^{-2\beta}) \sim s^{-2\beta}$ e $\log(1+s^{-\alpha}) \sim s^{-\alpha}$, dal criterio di confronto asintotico abbiamo

$$\frac{\log(1+s^{-\alpha})\arctan(s^{-2\beta})}{s^{2\alpha-\beta+2}} \sim \frac{s^{-\alpha}s^{-2\beta}}{s^{2\alpha-\beta+2}} = \frac{1}{s^{3\alpha+\beta+2}},$$

e si ha convergenza se e solo se $3\alpha+\beta+2 > 1$, cioè $3\alpha+\beta > -1$.

(ii) Si ha $f'(x) = \frac{\log(1+x^{-\alpha})\arctan(x^{-2\beta})}{x^{2\alpha-\beta+2}} \sim \frac{x^{-\alpha}x^{-2\beta}}{x^{2\alpha-\beta+2}} = \frac{1}{x^{3\alpha+\beta+2}}$, per cui $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ esiste finito se e solo se $3\alpha+\beta+2 \geq 0$, cioè $3\alpha+\beta \geq -2$.

(iii) Per $\alpha=0$ e $\beta=0$ si ha $f(x) = \int_1^x \frac{\log 2 \arctan 1}{s^2}\,ds = \frac{\pi}{4}\log 2 \int_1^x s^{-2}\,ds =$

$= \frac{\pi}{4}\log 2 \left(-s^{-1}\right)\Big|_1^x = \frac{\pi}{4}\log 2\left(1-\frac{1}{x}\right).$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}\log 2$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	19 giugno 2014

3. **(6 punti)** Si determini la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4xe^{-x^2}(9+y^2) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Qual è il valore $x_0 > 0$ per cui $\lim_{x\to x_0^-} y(x) = +\infty$?

Si tratta di un'equazione non-lineare del 1° ordine a variabili separabili. Si ha

$$\frac{dy}{dx} = 4xe^{-x^2}(9+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{9+y^2} = 4xe^{-x^2}dx\,,$$

e dunque

$$\int \frac{1}{9+y^2}dy = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+(y/3)^2}dy \overset{\substack{y/3 = t\,,\ dy = 3dt \\ \uparrow}}{=} \frac{1}{9}\,3\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + \text{cost} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + \text{co}$$

$$\int 4xe^{-x^2}dx \underset{\substack{\downarrow \\ x^2 = s\,,\ 2xdx = ds}}{=} \int 2e^{-s}ds = -2e^{-s} + \text{cost} = -2e^{-x^2} + \text{cost}\,,$$

per cui

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} = -2e^{-x^2} + c \overset{\substack{y(0)=0\ldots \\ \uparrow}}{\Rightarrow} \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 0 = 0 = -2 + c \Rightarrow c = 2\,.$$

Quindi

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg} y/3 = 2(1-e^{-x^2}) \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{3} = 6(1-e^{-x^2}) \Rightarrow \frac{y}{3} = \operatorname{tg}[6(1-e^{-x^2})],$$

e in conclusione

$$y(x) = 3\operatorname{tg}[6(1-e^{-x^2})]\,.$$

Si ha $\lim_{x\to x_0^-} y(x) = +\infty$ quando $6(1-e^{-x^2}) \to \pi/2$, quindi

$$1-e^{-x^2} \to \frac{\pi}{12} \Rightarrow e^{-x^2} \to 1 - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x^2 \to -\log\left(1-\frac{\pi}{12}\right) = \log\frac{12}{12-\pi}\,.$$

In conclusione, $x_0 = \sqrt{\log\frac{12}{12-\pi}}$.