COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

2 novembre 2010

Esercizio 1 (7 punti)

Si verifichi se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \sin y - 2xy^2}{x^2 + x^2y^4 + y^2},$$

e, se esiste, lo si calcoli.

Risultato: $L = 0$

Calcoli:

Per $x=0$, $y\neq 0$ il numeratore si annulla e il denominatore è $\neq 0$, quindi $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ e il "candidato" limite è $L=0$.

Per dimostrare che effettivamente il limite è 0 usiamo le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$. Si ha

$$\left| f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) - 0 \right| = \frac{|\rho^3\cos^3\theta \operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\theta) - 2\rho\cos\theta\,\rho^2\operatorname{sen}^2\theta|}{\rho^2 + \rho^6\cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta} \leq$$

$$\underset{\left[\text{poiché } \rho^6\cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta \geq 0\right]}{\leq} \frac{\rho^3}{\rho^2} \left|\cos^3\theta \operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\theta) - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right| \leq$$

$$\leq \rho\left(|\cos^3\theta|\,|\operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\theta)| + 2|\cos\theta|\,|\operatorname{sen}^2\theta|\right) \leq$$

$$\leq \rho\left(1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1\right) = 3\rho.$$

Abbiamo dunque ottenuto una maggiorazione in termini di una funzione infinitesima della sola ρ.

Il limite dunque esiste e vale 0.

Esercizio 2 (7 punti)

Si determinino i punti stazionari della funzione $f(x,y,z) = 2xy - 3y^2 + xyz$, e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Risultato: $(0,0,z)$ per $z \in \mathbb{R}$; $(x,0,-2)$ per $x \in \mathbb{R}$; tutti pti di sella

Calcoli:

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + zy \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 6y + xz \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy .$$

Dobbiamo trovare i valori per cui $\vec{\nabla} f = (0,0,0)$. L'ultima derivata è nulla per $x=0$ oppure $y=0$. Messo $x=0$ nella seconda si trova $y=0$, e messi $x=0$ e $y=0$ nella prima si vede che è verificata per ogni z. Dunque $(0,0,z)$ sono punti stazionari per ogni $z \in \mathbb{R}$. Messo $y=0$ nella seconda si trova $x(2+z)=0$, dunque $x=0$ oppure $z=-2$, e in ogni caso la prima equazione è verificata. Dunque $(0,0,z)$ e $(x,0,-2)$ sono punti stazionari per ogni $z \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. [I primi li avevamo già trovati...]

Calcoliamo l'hessiano: risulta $\begin{pmatrix} 0 & 2+z & y \\ 2+z & -6 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$. Nei punti $(0,0,z)$ vale $\begin{pmatrix} 0 & 2+z & 0 \\ 2+z & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e per $z \neq -2$ si ha un valore 0 sulla diagonale di una riga non tutta nulla: $(0,0,z)$ con $z \neq -2$ sono dunque punti di sella. [Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -3 \mp \sqrt{9+(2+z)^2}$, che per $z \neq -2$ sono discordi...]

Nei punti $(x,0,-2)$ l'hessiano vale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, e dunque per $x \neq 0$ abbiamo un valore 0 sulla diagonale di una riga non tutta nulla, dunque i punti $(x,0,-2)$ per $x \neq 0$ sono punti di sella. [Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -3 \mp \sqrt{9+x^2}$, che per $x \neq 0$ sono discordi...].

Resta il punto $(0,0,-2)$. Riscrivendo la funzione come $xy(2+z) - 3y^2$, si vede che per $x=0$, $z=-2$ e $y \neq 0$ assume valori < 0. Invece per $x = \sqrt{y}$, $z = -2 + k\sqrt{y}$ e $y>0$ vale $\sqrt{y} \cdot y \cdot k\sqrt{y} - 3y^2 = (k-3)y^2$, dunque per $k>3$ assume valori >0. Il punto $(0,0,-2)$ è dunque una sella.

Esercizio 3 (8 punti)

Data la curva $\gamma(t) = (2t - t^2, 2t + t^2, t - 1)$

- si determinino il versore tangente, il versore normale, il versore binormale in ogni punto di $\gamma(t)$;
- si determini il piano osculatore (cioè quello generato da **T** e **N**) nel punto $\gamma(1) = (1, 3, 0)$.

Risultati: $\boxed{\vec{T} = (9+8t^2)^{-1/2}(2-2t, 2+2t, 1);\ \vec{B} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,-1,4);\ \vec{N} = \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{9+8t^2}}(-8t-9, 9-8t, -4t).}$ $\boxed{x+y-4z=4}$

Calcoli:

Si ha $\gamma'(t) = (2-2t, 2+2t, 1)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(2-2t)^2+(2+2t)^2+1} =$
$= \sqrt{9+8t^2}$. Dunque

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{9+8t^2}}(2-2t, 2+2t, 1).$$

Calcoliamo: $\gamma''(t) = (-2, 2, 0)$. Dunque

$$\gamma' \times \gamma'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2-2t & 2+2t & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (-2, -2, 4-4t+4+4t) = (-2,-2,8).$$

Siccome $\vec{B} = \gamma' \times \gamma'' / \|\gamma' \times \gamma''\|$, si ha

$$\vec{B}(t) = \frac{(-2,-2,8)}{\sqrt{72}} = \frac{(-1,-1,4)}{3\sqrt{2}}.$$

Infine $\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$, dunque

$$\vec{N}(t) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ 2-2t & 2+2t & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{9+8t^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{9+8t^2}}(-8t-9, 9-8t, -4t).$$

Il piano <u>osculatore</u> è quello ortogonale a $\vec{B}$. Dunque si ha (in ogni punto $\gamma(t)$ ...)

$$(-1)(x-1) - (1)(y-3) + 4z = 0, \text{ cioè } x+y-4z = 4.$$

[Il piano normale è quello ortogonale a $\vec{T}$, che per $t=1$ vale
$\vec{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{17}}(0,4,1)$. Quindi

$$4(y-3) + z = 0, \text{ cioè } 4y+z = 12.]$$

<u>Non</u> richiesto...

[Il piano rettificante è quello ortogonale a $\vec{N}$, che per $t=1$ vale
$\vec{N}(1) = \frac{1}{3\sqrt{34}}(-17, 1, -4)$. Quindi

$$(-17)(x-1) + 1\cdot(y-3) - 4z = 0, \text{ cioè } 17x - y + 4z = 14.]$$

<u>Non</u> richiesto...

Esercizio 4 (8 punti)

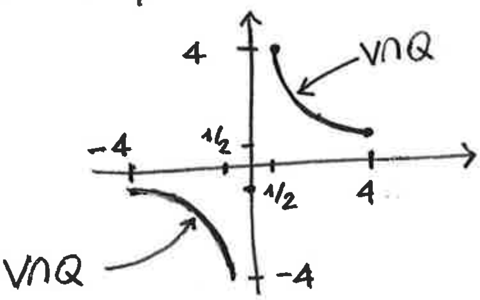
Siano $V = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, xy = 2\}$ e $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -4 \le x \le 4\,, -4 \le y \le 4\}$. Determinare il massimo e il minimo della funzione $F(x,y) = 2x^2 - y + 1$ sull'intersezione di $V \cap Q$. Esistono il massimo e il minimo di F su V? E sull'intersezione di V con il terzo quadrante?

Risultati: MAX : $F(-4,-1/2) = 67/2$
MIN : $F(1/2, 4) = -5/2$

Non esistono max e min su V.
Non esiste max su $V \cap \{3^\circ \text{quadr}\}$, ma c'è min : $F(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -2\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt{2}+1$.

Calcoli:

V è dato da due rami di iperbole, Q è un quadrato. Dunque $V \cap Q$ è la parte di iperbole dentro il quadrato:



$xy = 2$ per $y = 4$ dà $x = 1/2$
e per $x = 4$ dà $y = 1/2$
Analogamente per $y = -4$, $x = -1/2$ e $x = -4$, $y = -1/2$.

Per determinare massimo e minimo si può "restringere" la funzione su $V \cap Q$, cioè considerare $G(x) = F(x, 2/x) = 2x^2 - \frac{2}{x} + 1$, con $x \in [-4, -1/2] \cup [1/2, 4]$. [Per esercizio...]

Facciamolo però con i moltiplicatori di Lagrange, considerando V come il luogo di zeri di $W(x,y) = xy - 2$.
Facendo le derivate prime otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \\ W(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 4x - \lambda y = 0 \to x = \lambda/4\, y \\ -1 - \lambda x = 0 \quad -1 - \lambda^2/4\, y = 0. \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Se fosse $\lambda = 0$ ne verrebbe $x = 0$, che è incompatibile con $xy - 2 = 0$.
Dunque si ha $\lambda \ne 0$ e posso scrivere $y = -4/\lambda^2$. Così l'ultima equazione diventa $\frac{\lambda}{4}\left(-\frac{4}{\lambda^2}\right)^2 - 2 = 0$, cioè $4 = 2\lambda^3$, da cui $\lambda = \sqrt[3]{2}$, $y = -\frac{4}{2^{2/3}} = -2\sqrt[3]{2}$.
Dunque abbiamo individuato il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -2\sqrt[3]{2}\right)$.

Dobbiamo poi considerare gli estremi del vincolo: $(-4,-1/2)$, $(-1/2,-4)$, $(1/2,4)$ e $(4,1/2)$. Si ha $F(-4,-1/2) = 67/2$, $F(-1/2,-4) = 11/2$, $F(1/2,4) = -5/2$, $F(4,1/2) = 65/2$, $F(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -2\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{2} + 1$, da cui si deduce che il massimo di F è $67/2$, il minimo di F è $-5/2$.

Su V non esistono massimo e minimo, perché $F(x, 2/x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, $F(x, 2/x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$. Su $V \cap (3^\circ \text{quadr})$ si ha il minimo, perché $F(x, 2/x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty$.