COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

# Analisi Matematica II (EA)

2 settembre 2011

**Esercizio 1** (7 punti)

Sia $\gamma$ la curva espressa in coordinate polari $(\rho, \theta)$ da $\{\rho = \theta^2 + 1, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Sia $A$ la regione limitata che ha come bordo la curva $\gamma$ e il segmento che congiunge $(1,0)$ e $(1 + 4\pi^2, 0)$. Si calcoli l'area di $A$.

Risultato: $\boxed{\text{area} = \frac{16}{5}\pi^5 + \frac{8}{3}\pi^3 + \pi.}$

Calcoli:

Parametrizzando $\gamma$ in funzione di $\theta$ si ha $x = (\theta^2+1)\cos\theta$, $y = (\theta^2+1)\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (si ricordi che $\rho = \theta^2+1$...).

L'area si può calcolare tramite il teorema di Green:

$$\text{area} = \frac{1}{2}\int_{\{\gamma\}\cup\{s\}} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\{\gamma\}\cup\{s\}} (-y, x)\cdot d\vec{r}\,,$$

[$\{\gamma\}\cup\{s\}$ è l'unione delle curve $\gamma$ ed $s$...

ove $s$ è il segmento che congiunge $(1,0)$ e $(1+4\pi^2, 0)$, e bisogna percorrere $\gamma$ ed $s$ in senso antiorario.

Possiamo parametrizzare $s$ come $x = 1+4\pi^2 t$, $y = 0$, $t \in [0,1]$, per cui $(-y, x)$ calcolato su $s$ dà $(0, 1+4\pi^2 t)$, mentre si ha $d\vec{r} = (4\pi^2, 0)\,dt$. In conclusione $\int_s (-y,x)\cdot d\vec{r} = 0$.

Invece

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(-(\theta^2+1)\sin\theta, (\theta^2+1)\cos\theta\Big)\cdot\Big(2\theta\cos\theta - (\theta^2+1)\sin\theta,\ 2\theta\sin\theta + (\theta^2+1)\cos\theta\Big)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\cancel{-(\theta^2+1)2\theta\sin\theta\cos\theta} + (\theta^2+1)^2\sin^2\theta + \cancel{(\theta^2+1)2\theta\sin\theta\cos\theta} + (\theta^2+1)^2\cos^2\theta\Big]\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\theta^4 + 2\theta^2 + 1)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{32\pi^5}{5} + \frac{16}{3}\pi^3 + 2\pi\right) = \frac{16}{5}\pi^5 + \frac{8}{3}\pi^3 + \pi.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^2$ di $f(x,y) = x^2+4y^2-8y+1$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo e sella. Si determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f$ in $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 4\}$.

Risultati:

| | |
|---|---|
| Pto stazionario: $(0,1)$. Minimo relativo. | Max. assoluto: $33$, in $(0,-2)$. Min. assoluto: $-3$, in $(0,1)$. |

Calcoli:

Si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8y-8$, per cui i punti stazionari si trovano imponendo $2x=0$ e $8y-8=0$, dunque $x=0$, $y=1$.

La matrice hessiana è data da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$, per cui il punto stazionario $(0,1)$ è di minimo relativo (due autovalori $>0$).

Sul bordo di D vale $x^2+y^2=4$, cioè $x^2=4-y^2$. La funzione f sul bordo di D si riduce quindi a $4-y^2+4y^2-8y+1 = 3y^2-8y+5$, con $y \in [-2,2]$ ($x^2+y^2=4$ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2...).

La derivata di $3y^2-8y+5$ vale $6y-8$, e si annulla per $y=4/3$ (a cui corrisponde $x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$).

I punti "candidati" a essere di massimo assoluto o di minimo assoluto sono $(0,1)$, $\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $(0,-2)$ e $(0,2)$.

Si ha

$f(0,1) = 4-8+1 = -3$ ; $f(0,-2) = 16+16+1 = 33$ ;

$f(0,2) = 16-16+1 = 1$ ; $f\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{20}{9} + \frac{64}{9} - \frac{32}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$.

Il massimo assoluto di f in D è quindi 33, il minimo assoluto di f in D è $-3$.

**Esercizio 3** (8 punti)
Si calcoli il volume di

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in [0,\pi/4], y^2 \le (\sin z)^2(\cos x)^2, z \in [0,2\pi]\}.$$

Risultato: $\boxed{\text{volume} = 4\sqrt{2}.}$

Calcoli:

La disequazione $y^2 \le (\sin z)^2(\cos x)^2$ significa

$$-|\sin z||\cos x| = -\sqrt{(\sin z)^2(\cos x)^2} \le y \le \sqrt{(\sin z)^2(\cos x)^2} = |\sin z||\cos x|.$$

Per $x \in [0,\pi/4]$ si ha $\cos x > 0$, dunque $|\cos x| = \cos x$. Per $z \in [0,\pi]$ si ha $\sin z \geq 0$, dunque $|\sin z| = \sin z$; per $z \in [\pi, 2\pi]$ si ha $\sin z \le 0$, dunque $|\sin z| = -\sin z$.

Il volume richiesto è dunque dato da $V_1 + V_2$, ove

$$V_1 = \int_0^{\pi} dz \int_0^{\pi/4} dx \int_{-\sin z \cos x}^{\sin z \cos x} dy = 2\int_0^{\pi} \sin z \, dz \int_0^{\pi/4} \cos x \, dx = 2\left(-\cos z \Big|_0^{\pi}\right)\left(\sin x \Big|_0^{\pi/4}\right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$V_2 = \int_{\pi}^{2\pi} dz \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin z \cos x}^{-\sin z \cos x} dy = -2\int_{\pi}^{2\pi} \sin z \, dz \int_0^{\pi/4} \cos x \, dx = 2\left(\cos z \Big|_{\pi}^{2\pi}\right)\left(\sin x \Big|_0^{\pi/4}\right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Dunque $V = V_1 + V_2 = 4\sqrt{2}$.

**Esercizio 4** (8 punti)

Sia $G$ il grafico della funzione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Si calcoli l'area della superficie $S$ data dalla parte di $G$ che è esterna al cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z > 3\sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Risultato: $\boxed{\text{area} = \frac{\pi}{6}\left(65^{3/2} - 1\right).}$

Calcoli:

Il modo più semplice di parametrizzare un grafico è scrivere $\vec{T}(x,y) = (x, y, g(x,y))$, cioè, in questo caso, $\vec{T}(x,y) = (x, y, x^2+y^2-4)$.

Bisogna però determinare anche la regione in cui variano i parametri $(x,y)$.

La proiezione sul piano $(x,y)$ dell'intersezione di $G$ con il bordo di $C$ è data da $x^2+y^2-4 = 3\sqrt{x^2+y^2}$, cioè, posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, si ottiene

$$\rho^2 - 4 = 3\rho \;,\; \rho^2 - 3\rho - 4 = 0 \;,\; \rho = \frac{3 \mp \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \mp 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}.$$

Siccome si chiede la parte di $G$ esterna a $C$, deve essere $x^2+y^2-4 \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$, dunque $\rho^2 - 3\rho - 4 \leq 0$, quindi $\rho \leq 4$.

Il dominio dove variano i parametri $(x,y)$ è dunque il cerchio $B((0,0),4)$ di centro $(0,0)$ e raggio $4$.

Per calcolare l'area bisogna integrare $\sqrt{1+|\nabla g|^2}$; siccome $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$, si ottiene $\sqrt{1+|\nabla g|^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$.

In conclusione

coordinate polari

$$\text{area} = \iint_{B((0,0),4)} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 d\rho \left(\rho\sqrt{1+4\rho^2}\right) =$$

[valore assoluto del determinante della matrice jacobiana...

$$= 2\pi \left(1+4\rho^2\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \Big|_{\rho=0}^{\rho=4} = \frac{\pi}{6}\left(65^{3/2} - 1\right).$$

[Per un grafico, l'elemento d'area $\left\| \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{T}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1+|\nabla g|^2} \ldots$]