COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

20 dicembre 2013

Esercizio 1 (7 punti)

Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x,y) = \left(\frac{y}{(1+x^2+y^2)^\alpha}, \frac{x}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\right)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\alpha \in \mathbf{R}$, si determini: (i) per quale valore di α il campo $\vec{v}$ è irrotazionale; (ii) per quale valore di α il campo $\vec{v}$ è a divergenza nulla.

Risultati: $\boxed{\alpha = 0}$ $\boxed{\alpha = 0}$

Calcoli:

(i) Bisogna avere $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$. Si ha

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} + x(-\alpha)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} 2x = \frac{1+x^2+y^2-2\alpha x^2}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} = \frac{1+(1-2\alpha)x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} + y(-\alpha)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} 2y = \frac{1+x^2+y^2-2\alpha y^2}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} = \frac{1+x^2+(1-2\alpha)y^2}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}}.$$

Dunque bisogna che si annulli per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -2\alpha\frac{(x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} \Rightarrow \alpha = 0.$$

(ii) Bisogna avere $\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$. Si ha

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = y(-\alpha)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} 2x \quad , \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = x(-\alpha)\frac{1}{(x^2+y^2+1)^{\alpha+1}} 2y,$$

dunque deve essere nullo per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = -4\alpha\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} \Rightarrow \alpha = 0.$$

Esercizio 2 (7 punti)

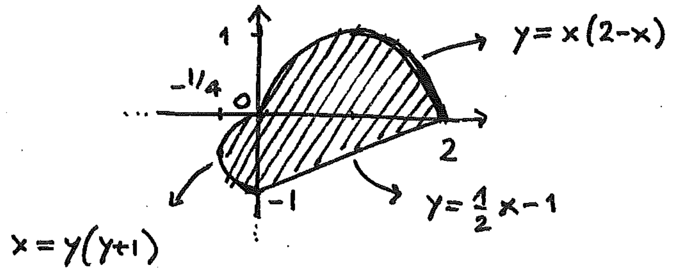
Si calcoli $\iint_D xy\,dxdy$, ove D è la regione del piano delimitata dalle curve

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|y=x(2-x), y\geq 0\}\,,\ \{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|x=y(y+1), x\leq 0\}\,,\ \{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|y=\frac{1}{2}x-1, x\geq 0, y\leq 0\}$$

Risultato: $3/8$

Calcoli:

Il disegno è



L'integrale richiesto è dunque

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2 dx \int_{\frac12 x-1}^{x(2-x)} xy\,dy + \int_{-1}^0 dy \int_{y(y+1)}^0 xy\,dx = \int_0^2 x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac12 x-1}^{x(2-x)} dx + \int_{-1}^0 y\,\frac{x^2}{2}\Big|_{y(y+1)}^0 dy =$$

$$= \frac12\int_0^2\left[x^3(2-x)^2 - x\left(\frac12 x-1\right)^2\right]dx - \frac12\int_{-1}^0 y^3(y+1)^2\,dy =$$

$$= \frac12\int_0^2\left[x^3(4-4x+x^2) - x\left(\frac14 x^2-x+1\right)\right]dx - \frac12\int_{-1}^0 y^3(y^2+2y+1)\,dy =$$

$$= \frac12\int_0^2(4x^3-4x^4+x^5-\frac14 x^3+x^2-x)\,dx - \frac12\int_{-1}^0(y^5+2y^4+y^3)\,dy =$$

$$= \frac12\left(x^4-\frac45 x^5+\frac16 x^6-\frac1{16}x^4+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 - \frac12\left(\frac16 y^6+\frac25 y^5+\frac14 y^4\right)\Big|_{-1}^0 =$$

$$= \frac12\left(16-\frac{128}{5}+\frac{32}{3}-1+\frac83-2+\frac16-\frac25+\frac14\right) = \frac{45}{120} = \frac38 .$$

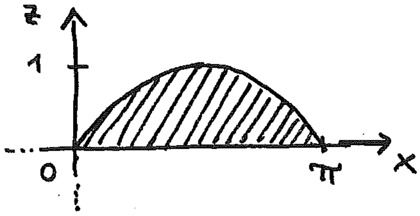
Esercizio 3 (8 punti)

Si calcoli $\iiint_Q (1+\cos x)\, dxdydz$, ove Q è la regione dello spazio ottenuta ruotando attorno all'asse x l'insieme $A = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \pi, 0 \le z \le \sin x\}$.

Risultato: $\boxed{\pi^2/2}$

Calcoli:

La figura che rappresenta A è
(z dà la distanza dall'asse di rotazione...)



In coordinate cilindriche possiamo scrivere $x=x$, $y=r\cos\theta$, $z=r\,\text{sen}\,\theta$, con $x\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$ ed $r\in[0,\sin x]$.

$$\iiint_Q (1+\cos x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} (1+\cos x)\,\overset{\text{Jacobiano!}}{r}\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (1+\cos x)\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sin x} dx = \pi \int_0^{\pi} (\sin^2 x + \sin^2 x \cos x)\,dx =$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

[Si noti che $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \pi/2$, per parti...

Si poteva anche pensare di integrare per strati, denotando con $C(x)$ la sezione ottenuta sezionando per x fissato (fra 0 e π). $C(x)$ è il cerchio di raggio $\sin x$ e centro $\vec{0}$. Dunque

$$\iiint_Q (1+\cos x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi} (1+\cos x)\left[\iint_{C(x)} 1\,dy\,dz\right] = \int_0^{\pi} (1+\cos x)\,\text{area}(C(x))\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} (1+\cos x)\,\underbrace{\pi \sin^2 x}_{\text{area di } C(x)\ldots}\,dx = \ldots\ldots = \pi^2/2.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli l'integrale superficiale $\iint_S x^2\, dS$, ove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = xy, (x,y) \in K\}$, e K è la corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2.

Risultato: $\frac{\pi}{3}\left(10\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{2}\right).$

Calcoli:

La parametrizzazione più naturale di S è

$$\vec{r}(x,y) = (x,y,xy) \quad ,(x,y)\in K.$$

Si ha $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1,0,y)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0,1,x)$,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = (-y,-x,1),$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Quindi

coordinate polari, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$...

$$\iint_S x^2 dS = \iint_K x^2\sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2\cos^2\theta\sqrt{1+\rho^2}\, \underbrace{\rho}_{\text{Jacobiano!}}\, d\rho =$$

per parti... (*)

$$= \pi \int_1^2 \rho^3\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho = \pi\left(\rho^2 \frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 2\rho(1+\rho^2)^{3/2} d\rho\right) =$$

$\left[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi\right.$, per parti...

$$= \pi\left(\frac{1}{3}\rho^2(1+\rho^2)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}(1+\rho^2)^{5/2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(10\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{2}\right).$$

(*) [Nell'integrazione per parti si è usato il fatto che la primitiva di $\rho(1+\rho^2)^{1/2}$ è $\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2}$...]