COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

20 gennaio 2014

Esercizio 1 (7 punti)

(i) Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{l}$, ove $\vec{v}(x,y)=(x-y,x+y,1)$ e il sostegno della curva $\vec{\alpha}$ è l'unione del sostegno della curva $\vec{\beta}(t)=(t\cos t, t\sin t, t)$, $t\in[0,\pi]$, e del segmento che congiunge $(-\pi,0,\pi)$ con $(0,0,0)$. (ii) Il campo $\vec{v}$ è conservativo?

Risultati: $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi^3}{3}$ | No.

Calcoli:

(i) Il segmento che congiunge $(-\pi,0,\pi)$ con $(0,0,0)$ può essere parametrizzato come $\vec{\gamma}(\tau)=(\pi,0,-\pi)\tau+(-\pi,0,\pi)$, $\tau\in[0,1]$.

Dunque, essendo $\vec{\beta}'(t)=(\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t, \sin t + t\cos t, 1)$, $\vec{\gamma}'(\tau)=(\pi,0,-\pi)$, si ha

$$\int_\beta \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^\pi (t\cos t - t\sin t, t\cos t + t\sin t, 1)\cdot(\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t, \sin t + t\cos t, 1)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \Big(t\cos^2 t - t^2\cancel{\cos t}\sin t - t\cancel{\sin t}\cos t + t^2\sin^2 t + t\cancel{\cos t}\,\mathrm{sen}\,t + t^2\cos^2 t + t\sin^2 t + t^2\cancel{\mathrm{sen}\,t}\cos t + 1\Big)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi (t+t^2+1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^3}{3}+\pi.$$

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (\pi(\tau-1), \pi(\tau-1), 1)\cdot(\pi,0,-\pi)\,d\tau = \int_0^1 [\pi^2(\tau-1)-\pi]\,d\tau =$$

$$= \pi^2\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^1 - \pi^2 - \pi = -\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

Quindi $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_\beta \vec{v}\cdot d\vec{\ell} + \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi^3}{3}$.

(ii) Siccome la curva $\vec{\alpha}$ è chiusa (parte da $(0,0,0)$ e ritorna a $(0,0,0)$) e $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi^3}{3} \neq 0$, il campo $\vec{v}$ non è conservativo.

[Si può anche vedere che $\mathrm{rot}\,\vec{v} = (0,0,1-(-1)) = (0,0,2) \neq (0,0,0)$, per cui $\vec{v}$ non è conservativo.]

Esercizio 2 (8 punti)

Si determini la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

Risultato: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pto max. relativo; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pto min. relativo

Calcoli:

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+1-(x-y)2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-x^2+y^2+2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2-1-(x-y)2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-x^2+y^2-2xy-1}{(x^2+y^2+1)^2},$$

per cui il gradiente ∇f si annulla per

$$\begin{cases} -x^2+y^2+2xy+1=0 \\ -x^2+y^2-2xy-1=0 \end{cases} \to \text{sottraggo questa dalla prima} \to 4xy=-2,$$

e inserendo nella prima si ha $-x^2+y^2-1+1 = -x^2+y^2=0$, cioè $x=\pm y$. Per $x=y$, da $4xy=-2$ viene $y^2=-1/2$, che è impossibile. Per $x=-y$, da $4xy=-2$ viene $y^2=1/2$ e quindi $y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. I punti stazionari sono quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Le derivate seconde valgono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(-2x+2y)(x^2+y^2+1)^2-(-x^2+y^2+2xy+1)2(x^2+y^2+1)2x}{(x^2+y^2+1)^4}.$$

Siccome per i due punti stazionari si ha $(-x^2+y^2\pm 2xy\pm 1)=0$, si ha ha subito $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2/\sqrt{2}-2/\sqrt{2})/4 = -1/\sqrt{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1/\sqrt{2}$.

Poi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(2y-2x)(x^2+y^2+1)^2-(-x^2+y^2-2xy-1)2(x^2+y^2+1)2y}{(x^2+y^2+1)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{(2y+2x)(x^2+y^2+1)^2-(-x^2+y^2+2xy+1)2(x^2+y^2+1)2y}{(x^2+y^2+1)^4} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

e dunque $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Conclusione: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è punto di massimo relativo, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è punto di minimo relativo.

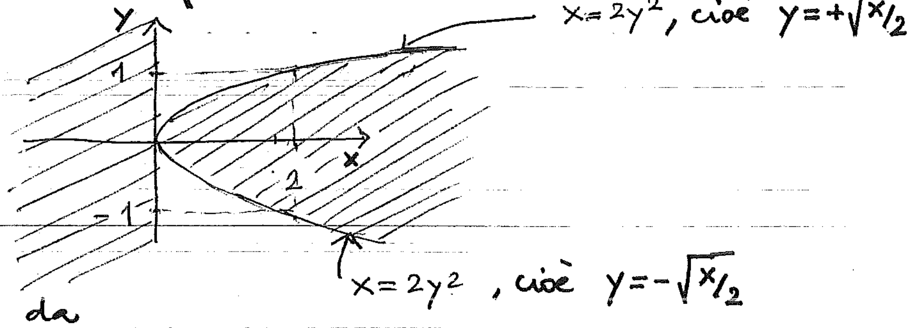
Esercizio 3 (8 punti)

Si individui la regione del piano ove la funzione $f(x, y) = x^2 - 2y^2x$ è non-negativa, e quindi si calcoli il volume dell'insieme K cosí definito: è interno alla fascia $\{0 \leq x \leq 2\}$, delimitato dal basso dal piano $\{z = 0\}$, delimitato dall'alto dal grafico $\{z = f(x, y)\}$.

Risultato: $\boxed{\mathrm{vol}(K) = \frac{64}{21}.}$

Calcoli:

La regione del piano dove $f(x,y)$ è ≥ 0 è data dagli (x,y) per cui $x^2 - 2y^2x = x(x-2y^2) \geq 0$, cioè $x \geq 0$ e $x \geq 2y^2$ (che dà $x \geq 2y^2$), e $x \leq 0$ e $x \leq 2y^2$ (che dà $x \leq 0$).



Dunque K è dato da

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{x/2} \leq y \leq \sqrt{x/2}, 0 \leq z \leq x^2 - 2y^2x\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 - 2y^2x\}.$$

Quindi

$$\mathrm{vol}(K) = \int_{-1}^{1} dy \int_{2y^2}^{2} dx \int_{0}^{x^2-2y^2x} dz = \int_{-1}^{1} dy \int_{2y^2}^{2} (x^2 - 2y^2x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \left(\frac{x^3}{3} - \cancel{2}y^2\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_{2y^2}^{2} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{8}{3} - \frac{8y^6}{3} - 4y^2 + 4y^6\right) dy =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{21} y^7 \Big|_{-1}^{1} - \frac{4}{3} y^3 \Big|_{-1}^{1} + \frac{4}{7} y^7 \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{16}{21} - \frac{8}{3} + \frac{8}{7} = \frac{56 - 16 + 24}{21} = \frac{64}{21}.$$

Esercizio 4 (7 punti)

Si calcoli il flusso $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, ove S è la superficie laterale del cono ottenuto ruotando attorno all'asse z il grafico $\{(x,z)\in \mathbf{R}^2 \,|\, z=\frac{1}{2}x, 0\le x\le 2\}$, e $\vec{F}(x,y,z)=(-y,x,1)$. [Si scelga la normale che punta verso l'alto.]

Risultato: $\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi.}$

Calcoli:

L'insieme di rotazione che si ottiene deve soddisfare $z=\frac{1}{2}\rho$, essendo ρ la distanza dall'asse di rotazione z.

Dunque una parametrizzazione $\vec{r}$ della superficie S è $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=\frac{1}{2}\rho$, con $\theta\in[0,2\pi]$ e $\rho\in[0,2]$.

Quindi

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=(-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\cos\theta,0),\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}=(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta,\tfrac{1}{2}),$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 1/2\end{pmatrix}=\left(\tfrac{1}{2}\rho\cos\theta,\tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,-\rho\right).$$

Dovendo scegliere la normale che punta verso l'alto, $-\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$, il flusso vale

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\,(-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\cos\theta,1)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\rho\cos\theta,-\tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(\tfrac{1}{2}\rho^2\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}\cos\theta-\tfrac{1}{2}\rho^2\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}\cos\theta+\rho\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2=4\pi.$$