COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

# Analisi Matematica II (EA)

20 febbraio 2014

**Esercizio 1** (8 punti)

Si determinino il piano osculatore (cioè quello generato dai versori tangente e normale), la curvatura e la torsione della curva $\vec{\alpha}(t) = (t^2, 1-t, \sin(\pi t))$, $t \in \mathbf{R}$, nel punto $(1,0,0)$.

Risultati: $\boxed{\pi y - z = 0,}$ $\boxed{\kappa(1) = \frac{2\sqrt{1+\pi^2}}{(5+\pi^2)^{3/2}}.}$ $\boxed{\tau(1) = \frac{\pi^3}{2(1+\pi^2)}.}$

Calcoli:

Si ha $\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}$, $\kappa = \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}$, $\tau = \frac{(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}'''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2}$.

Calcoliamo le derivate:

$\vec{\alpha}'(t) = (2t, -1, \pi\cos(\pi t))$, $\vec{\alpha}''(t) = (2, 0, -\pi^2\sin(\pi t))$, $\vec{\alpha}'''(t) = (0, 0, -\pi^3\cos(\pi t))$.

Si ha $\vec{\alpha}(t) = (1,0,0)$ per $(t^2, 1-t, \sin(\pi t)) = (1,0,0)$, dunque $t=1$.

Quindi $\vec{\alpha}'(1) = (2, -1, -\pi)$, $\vec{\alpha}''(1) = (2,0,0)$, $\vec{\alpha}'''(1) = (0,0,\pi^3)$,

$$\vec{\alpha}'(1) \times \vec{\alpha}''(1) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -\pi \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, -2\pi, 2),$$

$\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = \sqrt{4+4\pi^2}$, $\|\vec{\alpha}'\| = \sqrt{5+\pi^2}$, $(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'') \cdot \vec{\alpha}''' = (0, -2\pi, 2) \cdot (0, 0, +\pi^3) = 2\pi^3$.

In conclusione, il piano osculatore è dato dai vettori ortogonali a $\vec{B}(1) = (0, -2\pi, 2)/2\sqrt{1+\pi^2}$, cioè

$$0 = (x-1)\cdot 0 + y \cdot (-2\pi) + z \cdot 2 = -2\pi y + 2z, \quad \text{cioè} \quad \pi y - z = 0.$$

Poi

$$\kappa(1) = \frac{2\sqrt{1+\pi^2}}{(5+\pi^2)^{3/2}}, \qquad \tau(1) = \frac{2\pi^3}{4(1+\pi^2)} = \frac{\pi^3}{2(1+\pi^2)}.$$

**Esercizio 2** (7 punti)

Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = xy + yz - xz$ sull'insieme $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x - y + z = 0, x^2 + z^2 \le 1\}$.

Risultato: $\boxed{\max_V f = 3/2 \ \left(\text{in } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \ \min_V f = 0 \ (\text{in } (0,0,0)).}$

Calcoli:

Dalla definizione di $V$ si può ottenere $y = x+z$, quindi la funzione $f$ ristretta a $V$ si può scrivere come

$$g(x,z) = f(x, x+z, z) = (x+z)(x+z) - xz = x^2+z^2+xz,$$

con $x^2+z^2 \le 1$.

Calcolando il gradiente di $g$ si ha $\nabla g(x,z) = (2x+z, 2z+x)$, e imponendo $\nabla g = (0,0)$ si trova $x=0, z=0$,$^{(*)}$ Questo è l'unico punto stazionario interno di $g$ in $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+z^2 \le 1\}$. Sul bordo $\{x^2+z^2=1\}$, parametrizzato come $x = \cos\theta$, $z = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha

$$k(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) = 1 + \sin\theta\cos\theta \quad , \quad k'(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta ,$$

e si ha $k'(\theta) = 0$ per $\cos^2\theta = \sin^2\theta$, cioè $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/4$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$; e il valore di $k$ è $k(\pi/4) = k(5\pi/4) = 3/2$, $k(3\pi/4) = k(7\pi/4) = 1/2$.

Infine si ha $k(0) = k(2\pi) = 1$ (valore di $k$ negli estremi di $[0, 2\pi]$ ...).

In conclusione, il massimo di $f$ su $V$ è $3/2$, ottenuto nei punti $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; il minimo di $f$ su $V$ è $0$, ottenuto nel punto $(0,0,0)$.

---

(*) dove vale $g(0,0) = 0$ (e dunque $f(0,0,0) = 0$).

**Esercizio 3** (7 punti)

Si determini il polinomio di secondo grado $P(x) = a + bx + cx^2$ che nell'intervallo [0,1] ha distanza minima da $F(x) = x^3 + x$ (cioè, si determinino i valori dei coefficienti $a$, $b$, $c$ per cui $P(x) = a+bx+cx^2$ minimizza $\int_0^1 [P(x) - F(x)]^2 dx$).

Risultato: $\boxed{P(x) = \frac{1}{20} + \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}x^2 .}$

Calcoli:

Si deve minimizzare $\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)^2 dx$ rispetto ai parametri $a, b, c$. Imponendo l'annullarsi del gradiente (rispetto ad $a$, $b$, $c$) si ha

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)^2 dx\right] = 2\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)\, dx =$$
$$= 2a + b + \frac{2}{3}c - \frac{1}{2} - 1 = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left[\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)^2 dx\right] = 2\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)\, x\, dx =$$
$$= a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}c - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left[\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)^2 dx\right] = 2\int_0^1 (a+bx+cx^2-x^3-x)\, x^2 dx =$$
$$= \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{2}{5}c - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0$$

Dalla prima si ha $b = 3/2 - 2a - 2/3\, c$ ; dalla seconda $a = \frac{16}{15} - \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c =$ $= \frac{16}{15} - 1 + \frac{4}{3}a + \frac{4}{9}c - \frac{1}{2}c$ , da cui $a = 3\left(\frac{1}{18}c - \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{6}c - \frac{1}{5}$ ; dalla terza $\frac{2}{5}c = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b = \frac{5}{6} - \frac{1}{9}c + \frac{2}{15} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}c - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}c$, cioè $\frac{2}{5}c = \frac{1}{60} + \frac{7}{18}c$, da cui $\left(\frac{2}{5} - \frac{7}{18}\right)c = \frac{1}{60}$ , cioè $c = 3/2$ .

Di conseguenza ne deriva $a = \frac{c}{6} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ , e $b = \frac{3}{2} - 2a - \frac{2}{3}c =$ $= \frac{3}{2} - \frac{1}{10} - 1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .

Il polinomio $P(x)$ è quindi dato da $P(x) = \frac{1}{20} + \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}x^2$.

**Esercizio 4** (8 punti)

Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_K x\,dxdydz$, ove $K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 0 \le z \le 4 - x^2, x^2 - 2x + y^2 \le 0\}$.

Risultato: $\boxed{\iiint_K x\,dxdydz = \frac{9}{4}\pi.}$

Calcoli:

Il metodo più "naturale" è integrare per fili, da $0$ a $4-x^2$, avendo $(x,y)$ nell'insieme $x^2-2x+y^2 \le 0$. Questo insieme è

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 \le 0, \quad \text{cioè} \quad (x-1)^2 + y^2 \le 1,$$

dunque il cerchio $C$ di centro $(1,0)$ e raggio $1$.

Si deve dunque calcolare

$$\iint_C \left[ \int_0^{4-x^2} x\,dz \right] dxdy = \iint_C x(4-x^2)\,dxdy.$$

Usando coordinate polari centrate in $(1,0)$, cioè $x = 1+\rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$, con jacobiano $\rho$, si ha

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left[ \int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\left(4-(1+\rho\cos\theta)^2\right)\rho\,d\rho \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho(4-1-2\rho\cos\theta-\rho^2\cos^2\theta)\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\cos\theta\,(3-2\rho\cos\theta-\rho^2\cos^2\theta)\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3\rho - 2\rho^2\cos\theta - \rho^3\cos^2\theta)\,d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3\rho^2\cos\theta - 2\rho^3\cos^2\theta - \rho^4\cos^3\theta)\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos^2\theta + \cos\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{5}\cos^3\theta \right) =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \pi$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 2\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{9}{4}\pi - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta + \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{9}{4}\pi.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta \Big|_0^{2\pi} = 0.$$