ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	20 giugno 2019

1. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione $F(x) = \sqrt{|x^2+4x+3|}$. In particolare, se ne determinino l'insieme di definizione, i limiti all'infinito, gli eventuali asintoti obliqui, la crescenza/decrescenza, la convessità/concavità e, se esistono, i punti e i valori di massimo relativo, minimo relativo, massimo assoluto e minimo assoluto.

La funzione è definita se l'argomento della radice è ≥ 0. Siccome l'argomento è un modulo, questo è sempre verificato. Il segno di x^2+4x+3 è positivo per x esterno alle radici; queste sono

$$x^2+4x+3=0 \to x = -2 \mp \sqrt{4-3} = \begin{cases}-3\\-1\end{cases}.$$

Quindi studiamo la funzione $F_+(x)=\sqrt{x^2+4x+3}$ per $x<-3$ e $x>-1$, e la funzione $F_-(x)=\sqrt{-x^2-4x-3}$ per $-3<x<-1$.

Si ha, ovviamente, $F(-3)=0$ e $F(-1)=0$, per cui $x=-3$ ed $x=-1$ sono punti di minimo assoluto, dato che $F(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

- $x<-3$ e $x>-1$: $F_+' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot(2x+4) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}$. Il segno di F_+' è positivo per $x>-2$. Dunque F_+ decresce per $x<-3$ e cresce per $x>-1$ (e lo stesso fa F, che in queste regioni coincide con F_+).

Poi

$$F_+'' = \frac{\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)\frac{\cancel{2}(x+2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4x+3}}}{(x^2+4x+3)} = \frac{x^2+4x+3-(x^2+4x+4)}{(x^2+4x+3)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{(x^2+4x+3)^{3/2}} < 0.$$

Dunque F_+ (ed F) è concava (concavità rivolta verso il basso) per $x<-3$ e $x>-1$.

- $-3<x<-1$: $F_-' = \frac{1}{2\sqrt{-x^2-4x-3}}\cdot(-2)(x+2) = -\frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$, per cui F_- cresce per $x<-2$ e decresce per $x>-2$. Si ha quindi $x=-2$ punto di massimo relativo, con $F(-2)=\sqrt{|4-8+3|}=\sqrt{|-1|}=1$.

Poi

$$F_-'' = -\frac{\sqrt{-x^2-4x-3} - (x+2)\frac{(-2x-4)}{2\sqrt{-x^2-4x-3}}}{(-x^2-4x-3)} = -\frac{(-x^2-4x-3)+(x^2+4x+4)}{(-x^2-4x-3)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{(-x^2-4x-3)^{3/2}} < 0,$$

per cui F_- (ed F) è concava per $-3<x<-1$.

I limiti all'infinito valgono (ovviamente...) $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$. Non esistono dunque massimi assoluti.

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	20 giugno 2019

1. **(6 punti)** Si disegni il grafico qualitativo della funzione $F(x) = \sqrt{|x^2+4x+3|}$. In particolare, se ne determinino l'insieme di definizione, i limiti all'infinito, gli eventuali asintoti obliqui, la crescenza/decrescenza, la convessità/concavità e, se esistono, i punti e i valori di massimo relativo, minimo relativo, massimo assoluto e minimo assoluto.

Controlliamo l'esistenza di eventuali asintoti obliqui. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+4x+3}{x^2}} = -1$$

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$ per $x<0$...

Poi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+3}-x}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+4x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+3/x}{\sqrt{\frac{x^2+4x+3}{x^2}}+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

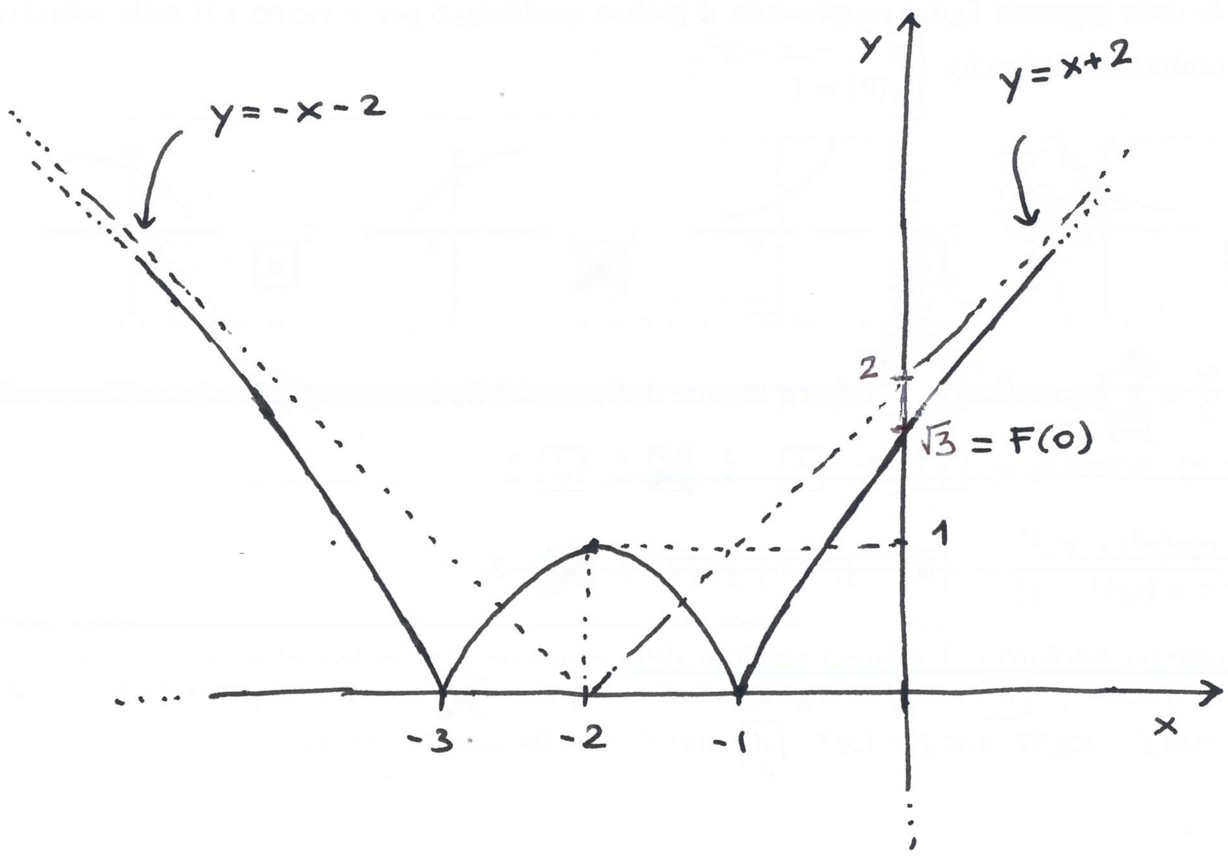
$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$...

raccogliendo x...

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+4x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+3}-x} = \ldots = -2.$$

Ci sono dunque due asintoti obliqui: $y = x+2$ a $+\infty$, $y = -x-2$ a $-\infty$.

Grafico qualitativo:



2. (6 punti) i) Per ogni $b \in [0,1]$ si calcoli il volume $V(b)$ del solido ottenuto ruotando attorno all'asse y la regione di piano

$$A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 2\pi, \frac{b}{2\pi}x \le y \le \sin\frac{x}{4} \right\}.$$

ii) Si determini per quale valore $b \in [0,1]$ il volume $V(b)$ è massimo.

(i) Il volume richiesto è dato dalla formula

$$V(b) = 2\pi \int_0^{2\pi} x \left[\sin\frac{x}{4} - \frac{b}{2\pi}x \right] dx .$$

(È la differenza fra il volume ottenuto ruotando $\{ 0 \le y \le \sin\frac{x}{4} \}$ e quello ottenuto ruotando $\{ 0 \le y \le \frac{b}{2\pi}x \}$ ...)

$\cos \pi/2 = 0$

integrando per parti $x \sin\frac{x}{4}$ ...

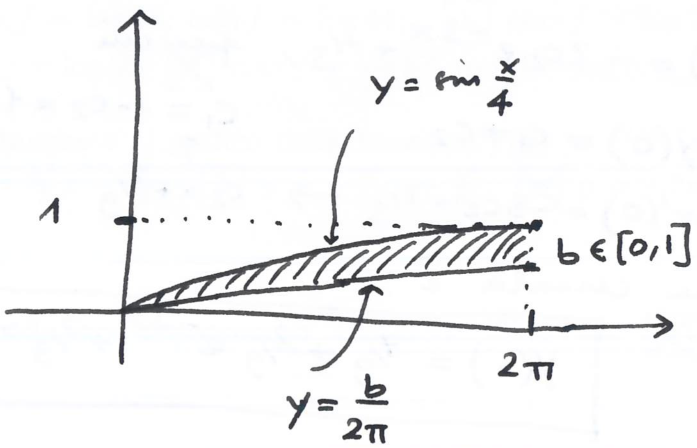
Dunque

$$V(b) = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(x \sin\frac{x}{4} - \frac{b}{2\pi}x^2 \right) dx = -b \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} + 2\pi \left[\left. -x\, 4 \cdot \cancel{\cos(x/4)} \right|_0^{2\pi} \right] + 2\pi \int_0^{2\pi} 4 \cos(x/4)\, dx =$$

$$= -\frac{8}{3}b\pi^3 + 8\pi \cdot 4 \sin(x/4) \Big|_0^{2\pi} = 32\pi - \frac{8}{3}b\pi^3 .$$

(ii) Il valore per cui $V(b)$ è massimo è chiaramente quando $b = 0$ ($V(b)$ è decrescente in b ...).

[Essendo $y = \frac{b}{2\pi}x$ la retta che congiunge $(0,0)$ a $(2\pi, b)$, la risposta era evidente anche per ragioni "geometriche"...



L'area della sezione tratteggiata è massima per $b = 0$ ...]

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	20 giugno 2019

3. **(6 punti)** Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) = 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 2° ordine, a coefficienti costanti, non-omogenea.
La soluzione dell'equazione omogenea si ottiene trovando le radici del polinomio associato $r^2 + 3r = 0$, cioè $r = 0$ ed $r = -3$. Quindi

$$u_0(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

Il metodo di somiglianza ci dice che una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea è della forma $y_*(x) = A$, a meno che questa sia soluzione dell'omogenea (e in questo caso lo è). Quando questo accade una soluzione particolare della non-omogenea si ottiene moltiplicando per x il candidato precedente, cioè $y_*(x) = Ax$.
Si ha $y_*'(x) = A$, $y_*''(x) = 0$, per cui $y_*''(x) + 3y_*'(x) = 3A$, che deve essere uguale a 2. Dunque $A = 2/3$ e $y_*(x) = \frac{2}{3}x$.
La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}x.$$

Si ha $y'(x) = -3c_2 e^{-3x} + 2/3$, per cui

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = y'(0) = -3c_2 + 2/3 \longrightarrow c_2 = +2/9 \end{cases} \qquad c_1 = 1 - c_2 = 1 - 2/9 = 7/9.$$

La soluzione cercata è

$$\boxed{y(x) = 7/9 + 2/9\, e^{-3x} + 2/3\, x}.$$