RISULTATI (NUMERICI) SECONDA PROVETTA
21.12.17

Esercizio 1

Risultato: $\frac{5\pi}{32}$ (in entrambi i compiti).

Esercizio 2

Risultato: $\frac{4}{3}$ (in entrambi i compiti).

Esercizio 3

Risultato:

- $R = 2$ nel caso $\iiint z \, dxdydz = 2\pi$;
- $R = \sqrt{2}$ nel caso $\iiint z \, dxdydz = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 4

Risultato: 20π (in entrabi i compiti).

Nelle pagine seguenti la risolzione degli esercizi (una sola delle due versioni).

COGNOME   NOME   Matr.

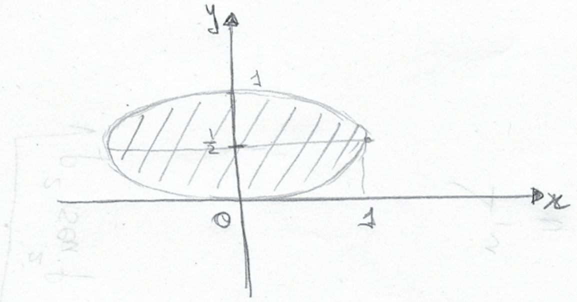
Analisi Matematica 2

21 dicembre 2017

Esercizio 1. Sia $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+4y^2-4y\le 0\}$. Si calcoli $\iint_D y^2\,dxdy$.

Soluzione:

$$D=\{x^2+4y^2-4y\le 0\}\ ,\quad \iint_D y^2\,dx\,dy$$



$$\iint_D y^2\,dx\,dy =$$

$$x=\rho\cos\theta \qquad \det J=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta\\ \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta & \frac{1}{2}\rho\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho\,\text{sen}\,\theta \qquad =\frac{1}{2}\rho$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho\,\text{sen}\,\theta\right)^2\frac{\rho}{2}\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+2\rho\,\text{sen}\,\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta\right)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho+2\rho^2\text{sen}\,\theta+\rho^3\text{sen}^2\theta\,d\rho\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\text{sen}\,\theta+\frac{\text{sen}^2\theta}{4}\,d\theta$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}2\pi-\frac{2}{3}\cancel{\cos\theta}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}\frac{5}{4}\pi=\boxed{\frac{5}{32}\pi}$$

Esercizio 2. Sia c la curva di parametrizzazione $\vec{\gamma}(t) = (\cos(2t), \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Si calcoli l'area della regione racchiusa da c, l'asse delle x e la retta $r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = -1, y \in \mathbf{R}\}$.

Soluzione: Sia R la regione di cui ci è richiesta l'area. Il bordo di R è dato dalla curva γ, dal segmento verticale che congiunge $(-1, 0)$ a $(-1, 1)$ che possiamo parametrizzare con $\alpha(t) = (-1, t)$, $t \in [0, 1]$, e dal segmento orizzontale che collega $(-1, 0)$ a $(1, 0)$, che possiamo parametrizzare con $\beta(t) = (t, 0)$, $t \in (-1, 1)$.
Per il teorema di Gauss-Green abbiamo che

$$A(R) = \int_R 1 dxdy = \int_{\partial^+ R} F dr,$$

dove F è (ad esempio) il campo $F(x, y) = (0, x)$. Osservando che la parte di bordo di R parametrizzata da α è parametrizzata in senso orario, otteniamo

$$A(R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt - \int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt + \int_{-1}^1 F(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt$$

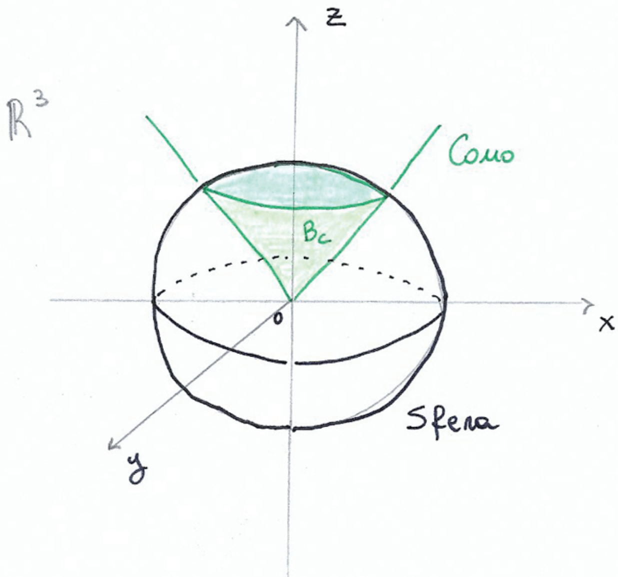
Svolgendo gli integrali si ottiene come risultato 1/2.

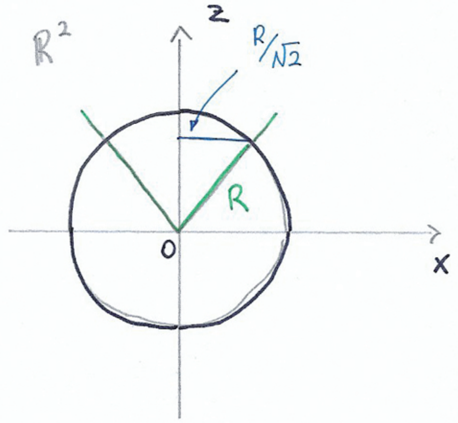
Esercizio 3. Sia B_C la parte della palla $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ che sta dentro al cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$. Si determini R in modo che $\iiint_{B_C} z\,dxdydz = \frac{\pi}{2}$.

Soluzione:

$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2 \}$$

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2} \}$$





$$\iiint_{B_c} z \, dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z \, dz \right] dx\,dy$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \frac{R^2}{2} \}$$

Dobbiamo risolvere:

$$\frac{1}{2} \iint_D R^2 - 2(x^2+y^2) \, dx\,dy \overset{\text{COORD. POLARI}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R/\sqrt{2}} \rho\,(R^2-2\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$$= \ldots = \frac{\pi R^4}{8}$$

Ponendo $\frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi}{2}$ otteniamo $R = \sqrt{2}$

Esercizio 4. Sia $\vec{F}(x,y,z) = (1,1,x^2)$ e sia S la superficie ottenuta dalla rotazione attorno all'asse z della parabola p contenuta nel piano (x,z) e data da $p = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, z = 4x - x^2 - 3, x \in [1,3]\}$. Si calcoli il flusso $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, scegliendo la direzione del versore normale $\vec{n}$ in modo che punti verso l'alto.

Soluzione:

Nel piano (x,z) la coordinata x è la distanza dall'asse, cioè quello che in coordinate cilindriche è ρ.

Dunque la superficie S si può esprimere come $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = 4\rho - \rho^2 - 3$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [1,3]$. Se indichiamo con $\vec{T}(\rho,\theta)$ questa parametrizzazione, si ha

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \sin\theta, 4-2\rho) \quad , \quad \frac{\partial \vec{T}}{\partial \theta} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0),$$

per cui $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{T}}{\partial \theta} = (-(4-2\rho)\rho\cos\theta, -(4-2\rho)\rho\sin\theta, \rho)$ (che è vettore che punta verso l'alto, come richiesto).

Dunque (si ricordi che $\vec{n}\, dS = \frac{\partial \vec{T}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{T}}{\partial \theta}\, d\rho\, d\theta \ldots$)

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 d\rho \left[(1,1,\rho^2\cos^2\theta) \cdot (-(4-2\rho)\rho\cos\theta, -(4-2\rho)\rho\sin\theta, \rho) \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 \left[-(4-2\rho)\rho(\cos\theta + \sin\theta) + \rho^3\cos^2\theta \right] d\rho =$$

$\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0\,!$

$\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0\,!$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 \rho^3 \cos^2\theta\, d\rho = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\rho=1}^{\rho=3} =$$

$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi\,!$

$$= \pi\, \frac{81-1}{4} = 20\pi.$$