ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	21 gennaio 2020

1. (6 punti) (i) Sia $f(x) = \frac{3-x}{1-x}e^{-x}$, $x \neq 1$. Si determinino, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto di f sia in $(-\infty, 0]$, sia in $[3, +\infty)$.
(ii) Sia $D = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 0 \leq x < 1, 1 < x \leq 3\}$. La funzione f ha massimo assoluto o minimo assoluto in D?

(i) $\boxed{\bullet}$ Consideriamo $(-\infty, 0]$. Studiamo la crescenza/decrescenza di f. Si ha

$$f'(x) = \frac{(-1)(1-x)-(-1)(3-x)}{(1-x)^2}e^{-x} - \frac{3-x}{1-x}e^{-x} = \left(\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{3-x}{1-x}\right)e^{-x} =$$

$$= \frac{2-(3-x)(1-x)}{(1-x)^2}e^{-x} = \frac{2-3+4x-x^2}{(1-x)^2}e^{-x} = -\frac{x^2-4x+1}{(1-x)^2}e^{-x}.$$

Le radici di x^2-4x+1 sono $x = 2 \mp \sqrt{4-1} = 2 \mp \sqrt{3}$, che sono entrambe >0 ($2 > \sqrt{3}$ perché $4 > 3$...). Dunque f decresce in $(-\infty, 0]$; essendo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ($\frac{3-x}{1-x} \to 1$, $e^{-x} \to +\infty$...), si conclude che in $(-\infty, 0]$ <u>non</u> c'è massimo per f, mentre il minimo è $f(0) = 3$.

$\boxed{\bullet\bullet}$ Consideriamo $[3, +\infty)$. Si ha $2-\sqrt{3} < 3$ (ovvio...) e $3 < 2+\sqrt{3}$ (dato che $\sqrt{3} > 1$ poiché $3 > 1$...). Quindi, dallo studio della derivata prima, sappiamo che f cresce per $3 < x < 2+\sqrt{3}$ e decresce per $x > 2+\sqrt{3}$. Poi si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ ($\frac{3-x}{1-x} \to 1$, $e^{-x} \to 0^+$...), e anche sappiamo che $f(x) > 0$ per $x > 3$ ($\frac{3-x}{1-x} = \frac{x-3}{x-1}$, e $x-3>0$, $x-1>0$ per $x>3$...) e che $f(3)=0$. Dunque f ha minimo assoluto 0 in $x=3$, e massimo assoluto per $x = 2+\sqrt{3}$, che vale

$$\frac{3-2-\sqrt{3}}{1-2-\sqrt{3}}e^{-2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}e^{-2-\sqrt{3}}.$$

(ii) In D, da quanto visto sul segno della derivata prima, sappiamo che f decresce per $0 < x < 2-\sqrt{3}$ (si ha $2-\sqrt{3} < 1$, poiché $3 > 1$...) e cresce per $2-\sqrt{3} < x < 1$ e $1 < x < 3$). [Abbiamo quindi un minimo relativo in $x = 2-\sqrt{3}$: questo però non rientra nelle richieste del compito...]. Più interessante, si ha

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad (x-1 \to 0^-...), \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad (x-1 \to 0^+...),$$

per cui f in D <u>non</u> ha né massimo assoluto né minimo assoluto.

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	21 gennaio 2020

2. **(6 punti)** Si determini l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n}\left(\frac{x+8}{x^2+2}\right)^n.$$

Ponendo $t = \frac{x+8}{x^2+2}$, possiamo ricondurci alla serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n} t^n$. Determiniamone il raggio di convergenza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+n+1}}{\frac{n^2}{3^n+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{3^n+n}{3^{n+1}+n+1} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(1+\overbrace{n/3^n}^{\to 0})}{3^{n+1}(1+\underbrace{\frac{n+1}{3^{n+1}}}_{\to 0})} = \frac{1}{3}.$$

Quindi $r=3$, e tornando alla serie assegnata si ha che è convergente per $\left|\frac{x+8}{x^2+2}\right| < 3$, e non convergente per $\left|\frac{x+8}{x^2+2}\right| > 3$.

Si ha

$$\left|\frac{x+8}{x^2+2}\right| < 3 \text{ se e solo se } \frac{|x+8|}{x^2+2} < 3,$$

cioè se e solo se

$$-3(x^2+2) \overset{1a}{<} x+8 \overset{2a}{<} 3(x^2+2).$$

La prima disuguaglianza è $3x^2+x+14>0$, e siccome nel cercare le radici abbiamo $x = \frac{-1 \mp \sqrt{1-12\cdot 14}}{6}$, cioè radici complesse, ne deriva che questa disuguaglianza è sempre verificata.

La seconda disuguaglianza dà $3x^2-x-2$, per cui le radici sono $x = \frac{1\mp\sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} -2/3 \\ 1 \end{cases}$, e la disuguaglianza è soddisfatta se e solo se $x<-2/3$ e $x>1$. Per $-2/3<x<1$ si ha invece $\left|\frac{x+8}{x^2+2}\right|>3$, e la serie non è convergente.

Quando $x=-2/3$ si ha $\frac{x+8}{x^2+2} = \frac{22/3}{22/9} = 3$; altrettanto per $x=1$, essendo $\frac{x+8}{x^2+2} = \frac{9}{3} = 3$.

Quindi per $x=-2/3$ e $x=1$ la serie assegnata diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n}\cdot 3^n$, e il termine generale tende a $+\infty$, per cui la serie non è convergente.

L'insieme di convergenza è dunque $\{x<-2/3\} \cup \{x>1\}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	21 gennaio 2020

3. **(6 punti)** (i) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(ii) Esistono valori $x > 0$ per cui si ha $y(x) = 0$? Se esistono, quali sono?

(i) È un'equazione differenziale del 2° ordine, lineare, a coefficienti costanti e non-omogenea.

Il polinomio associato $r^2-6r+13$ ha radici

$$r = +3 \mp \sqrt{9-13} = +3 \mp 2i\,,$$

per cui tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y_0(x) = c_1 e^{+3x}\cos(2x) + c_2 e^{+3x}\sin(2x),\quad c_1\in\mathbb{R}, c_2\in\mathbb{R}.$$

Siccome il termine noto e^{3x} non è soluzione dell'omogenea, una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea ha la forma $y_*(x) = Ae^{3x}$. Si ha $y_*'(x) = 3Ae^{3x}$, $y_*''(x) = 9Ae^{3x}$,

per cui

$$y_*''(x) - 6y_*'(x) + 13y_*(x) = (9A-18A+13A)e^{3x} = 4Ae^{3x},$$

e si deduce $A = 1/4$.

Tutte le soluzioni dell'equazione non-omogenea sono dunque

$$y(x) = c_1 e^{3x}\cos(2x) + c_2 e^{3x}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}e^{3x}.$$

Da questo viene

$$y'(x) = 3c_1e^{3x}\cos(2x) - 2c_1e^{3x}\sin(2x) + 3c_2e^{3x}\sin(2x) + 2c_2e^{3x}\cos(2x) + $$
$$+ 3/4\, e^{3x} \longrightarrow y'(0) = 3c_1 + 2c_2 + 3/4\,.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ha

$$y(0) = c_1 + 1/4 = 0 \to c_1 = -1/4$$
$$y'(0) = 3c_1 + 2c_2 + 3/4 = 0 \longrightarrow -3/4 + 2c_2 + 3/4 = 0 \to c_2 = 0.$$

La soluzione richiesta è dunque

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{3x}\cos(2x) = \frac{1}{4}e^{3x}(1-\cos(2x)).$$

(ii) Si ha $y(x) = 0$ per $\cos(2x) = 1$, cioè per $2x = 2k\pi$, $k = 1,2,3,\dots$,

quindi per $x = k\pi$, $k = 1,2,3,\dots$